Olympiades nationales de mathématiques 2019

Deuxième partie : exercices académiques 10h10 à 12h10

L'usage des calculatrices est autorisé conformément à la réglementation en vigueur.

Les candidats traitent **deux exercices** par groupes de 2 ou 3 **:**

- Les candidats de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Les calissons*) et 2 (*Les automates cellulaires*).
- Les candidats des autres séries traitent les exercices numéros 1 (*Les calissons*) et 3 (*Les triangles magiques*) .

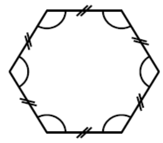
Les copies concernant ces exercices académiques seront ramassées au plus tard à 12 h 10.

Tous les élèves d'un même groupe doivent noter leur numéro d'anonymat sur la copie commune.

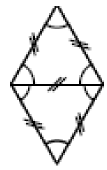
Exercices 1 : les calissons

Sujet inspiré d'un document du Palais de la Découverte (Découverte N°358 - 2008)

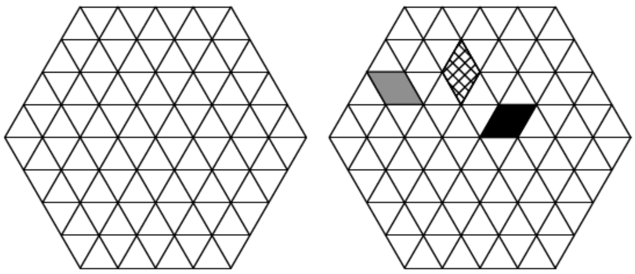
Rappel :
Un hexagone régulier est un polygone à 6 côtés de mêmes longueurs et ayant des angles intérieurs égaux.



On appelle calisson un losange constitué de deux triangles équilatéraux égaux collés de côté 1 comme ci-contre :



Dans cet exercice, on s'intéresse au pavage d'un hexagone régulier dont le côté est un entier *n* par des calissons de côté 1, c'est à dire au recouvrement complet de l'hexagone sans espaces vides ni chevauchements.



On remarque que les calissons peuvent être positionnés de trois façons différentes :
- Position 1 notée P_1: le calisson est représenté en gris ;
- Position 2 notée P_2 : le calisson est représenté en noir ;
- Position 3 notée P_3 : le calisson est représenté par un quadrillage.

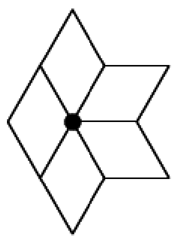
<u>Partie A : étude d'un exemple</u>

À la fin du sujet, on propose un hexagone régulier de côté 2.

1. Le compléter et donner un pavage de cet hexagone par des calissons de côté 1.
2. Découper et coller l'hexagone sur votre copie.

<u>Partie B : étude du nombre de calissons pour paver un hexagone de coté *n*</u>

1. Justifier que l'aire d'un calisson de côté 1 est égale à $\sqrt{3}$.
2. Exprimer en fonction de *n* l'aire d'un polygone régulier de côté *n.*
3. En déduire que, pour un hexagone régulier de côté *n,* on peut disposer exactement $3n^2$ calissons.
4. On veut dénombrer le nombre de façons d'associer les calissons autour d'un sommet.
   Voici un exemple d'association qui utilise 5 calissons autour du sommet marqué en noir.

   a. Justifier que l'association ci-contre est une association possible.
   b. Si *n* désigne le nombre d'angles de 60° et *m* le nombre d'angle de 120° montrer que $n < 7$, que $m < 4$ et que *m* et *n* sont solutions de l'équation $n + 2m = 6$.

c. On considère l'algorithme ci-contre où la variable m est un entier.
En expliquant l'utilisation de cet algorithme, déterminer le nombre d'associations possibles de calissons autour d'un sommet et les dessiner.

d. À la fin du sujet, on propose un hexagone régulier de côté 4.
Donner un pavage cet hexagone en complétant la figure qui sera à découper et à coller sur votre copie.

e. Que peut-on conjecturer sur le nombre de calissons P_1, P_2 et P_3 ?

```
m ← 0
Tant que m ≤ 3
  n ← 6-2*m
  Si n est un entier
    Afficher n
    Afficher m
  Fin Si
  m ← m+1
Fin Tant que
```

<u>Partie C</u> : Théorème des calissons

L'objectif de cette dernière partie est de démontrer le théorème suivant :

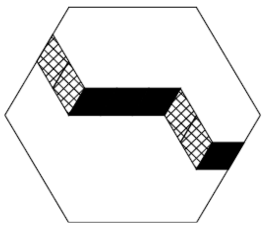
> **Théorème des calissons :**
> Quel que soit le pavage d'un hexagone régulier par des calissons, il y a autant de calissons, P_1, P_2 et P_3.

On considère pour la suite un hexagone régulier de côté n.

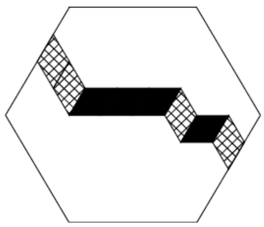
On appelle **chaîne** une suite de calissons qui relie deux côtés opposés parallèles de l'hexagone et tels que :

Deux calissons successifs ont un côté commun et parallèle aux cotés de l'hexagone d'où part et où arrive cette chaîne ;

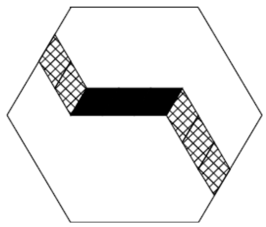
Les calissons de départ et d'arrivée sont positionnés de la même manière sur les côtés de l'hexagone.



Un exemple de chaîne



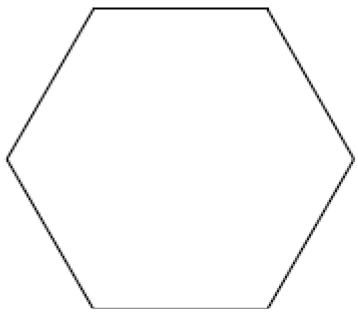
Un autre exemple de chaîne



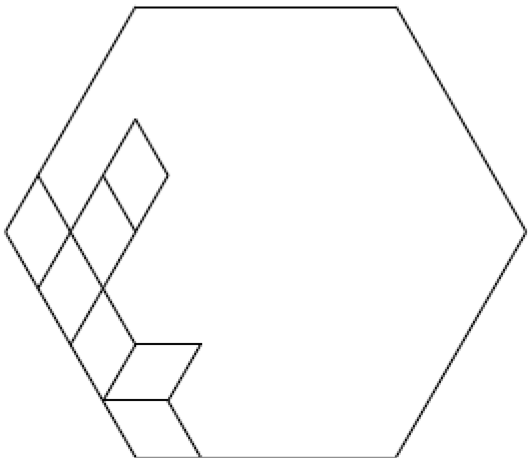
Ceci n'est pas une chaîne à cause des positions des calissons de départ et d'arrivée

1. Justifier qu'il existe exactement trois types de chaînes : celles constituées des calissons P_1 et P_2 (appelée de type 1), celles constituées des calissons P_2 et P_3 (appelée de type 2), et celles constituées des calissons P_1 et P_3 (appelée de type 3).
On admet pour la suite que deux chaînes de même type permettant un pavage d'un hexagone régulier sont disjointes.
2. Combien existe-t-il de chaîne de chaque type ?
3. On remarque qu'un calisson noir est l'intersection d'une chaîne de calissons de type 1 et de type 2.
   a. Montrer qu'un calisson noir ne peut être l'intersection de deux autres chaînes de calissons de type 1 et de type 2.
   b. Pour une chaîne de calissons de type 1 donnée, combien existe d'intersections entre cette chaîne et les chaînes de type 2.
   c. En déduire le nombre de calissons noirs dans le pavage puis le théorème des calissons.

Figures à découper et à coller sur votre copie



Hexagone de côté 2 - Partie A



Hexagone de côté 4 - Partie B

Exercice 2 : les automates cellulaires.

Toutes les réponses aux questions posées doivent être justifiées avec clarté.

Un automate est un mécanisme qui déroule une liste de règles déterminant des actions. Nous allons nous intéresser aux automates cellulaires dont les actions s'exécutent sur des cases appelées cellules et dont les actions seront des changements de couleurs.
Pour réaliser un automate cellulaire élémentaire, nous allons considérer des cases disposées en ligne. Chaque case peut être soit blanche, soit noire. Au démarrage de notre simulation, nous allons supposer qu'une seule case est noire, comme sur le schéma ci-dessous :

Figure 1 : Situation initiale

Puis nous allons faire évoluer notre système, en définissant des règles qui vont conditionner la manière dont la couleur des cases change à chaque étape de la simulation. La nouvelle couleur d'une case dépend uniquement de sa couleur actuelle et de celle de ses voisines. Voici **une** règle de ce genre :

- Si une case est noire, elle reste noire.
- Si elle est blanche, elle devient noire si elle possède au moins une voisine noire.

On peut facilement représenter cette règle graphiquement, car il n'existe que 8 cas à considérer :

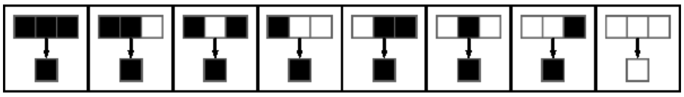
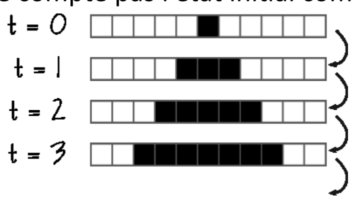


Figure 2 : règle 254

Voici ce que l'on obtient après 3 étapes (on ne compte pas l'état initial comme une étape) :



PARTIE A : échauffement.

On garde les règles définies ci-dessus.

1. Dessiner les 5 premières étapes sur votre copie.
2. Déterminer le nombre de cellules noires à l'étape 6.
3. Soit n un entier naturel. Déterminer le nombre de cellules noires à l'étape n, il sera noté A_n.
4. À partir de combien d'étapes le nombre de cellules noires sur une seule ligne dépassera-t-il 500 ?

PARTIE B : de nouvelles règles.

Au démarrage de la simulation nous n'avons toujours qu'une cellule noire comme dans la figure 1. Par contre la règle de la figure 2 va changer. Nous utilisons dans cette partie la règle suivante :

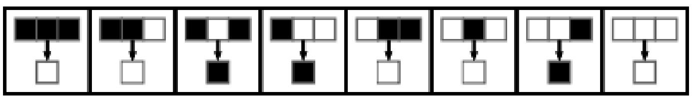


Figure 3 : règle 50

1. Dessiner les 5 premières étapes sur votre copie.
2. Déterminer le nombre de cellules noires à l'étape 6.
3. Soit n un entier naturel. Déterminer le nombre de cellules noires à l'étape n, il sera noté B_n .
4. À partir de combien d'étapes le nombre de cellules noires sur une seule ligne dépassera-t-il 500 ?

PARTIE C : on apprend à écrire de nouvelles règles.

1. Combien de règles différentes est-il possible de créer ?
2. Dans cette question nous allons associer un nombre à une règle. Nous avons besoin de son écriture dans la base binaire.
   Pour trouver l'écriture binaire d'un nombre entier N, nous allons appliquer l'algorithme suivant :

```
Entrée(s) : N est un entier naturel
A est une variable vide (pour l'instant) du type chaîne de caractères
Tant que N ≠ 0  faire :
        Le reste de la division de N par 2 est écrit dans de la chaîne de caractère A à
        gauche du premier caractère.
Le quotient de la division de N par 2 est stocké dans N
fin du «  Tant que »
Retourner A
Sortie(s) : L'écriture de N en binaire sous forme d'une chaîne de caractère.
```

   a. Montrer que l'écriture binaire de 126 est 1111110.
   b. A gauche, on ajoute autant de zéros que nécessaire pour avoir 8 caractères. On obtient donc 01111110.
      Cette écriture binaire donne la règle 126 ci-dessous :

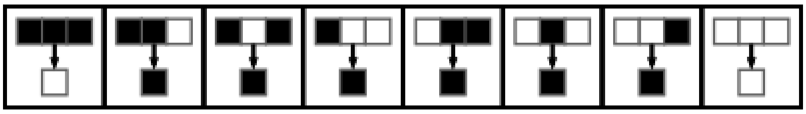
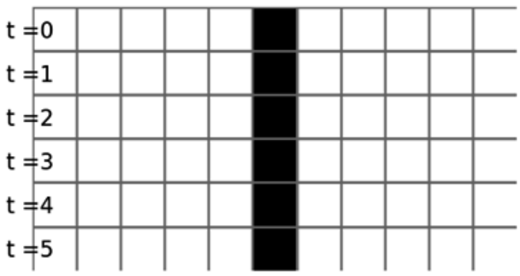


Figure 4 : règle 126

3. En procédant comme ci-dessus, dessiner les 5 premières étapes obtenues avec la règle 30.
4. En procédant comme ci-dessus, dessiner les 5 premières étapes obtenues avec la règle 54.
5. Que se passe-t-il lorsque N est impair lors du tracé des étapes ?

PARTIE D : On cherche à retrouver une règle.

L'objectif de cette partie va être de retrouver la (ou les) règle(s) permettant d'obtenir la situation ci-contre :



1. Déterminer combien de règles permettent d'obtenir cette évolution ?
2. Ecrire toutes les règles de la question précédente en notation binaire.
3. Si la notation binaire d'un nombre est $a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0$, alors ce nombre en notation décimale est donné par la formule :

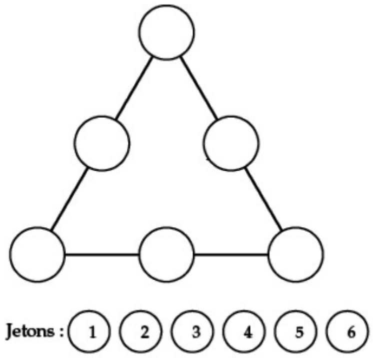
$$a_7 \times 2^7 + a_6 \times 2^6 + a_5 \times 2^5 + a_4 \times 2^4 + a_3 \times 2^3 + a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2^1 + a_0 \times 2^0$$

   Déterminer toutes les règles permettant d'obtenir cette évolution en notation décimale.

Exercice 3 : les triangles magiques

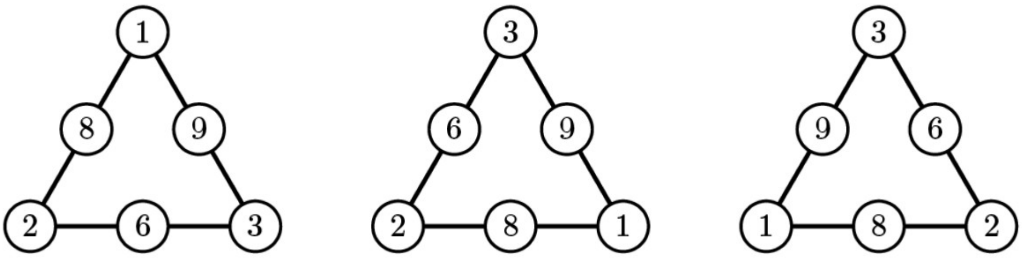
Toutes les réponses aux questions posées doivent être justifiées avec clarté.

PARTIE A : les triangles magiques de rang 3.



L'objectif de cette partie est de disposer les jetons numérotés de 1 à 6 sur un triangle de trois cases de côtés de façon à ce que la somme des trois chiffres sur chaque côté soit toujours la même.
Il ne peut donc pas y avoir deux jetons identiques dans deux cases différentes.
Un triangle vérifiant ces conditions sera appelé **triangle magique de rang 3.**

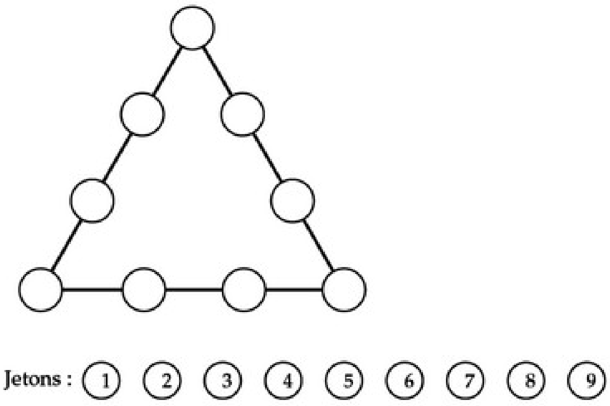
Pour tout l'exercice on considère que deux triangles sont identiques si les nombres sur chaque côté sont les même (sans tenir compte de l'orientation du triangle) .
Par exemple les trois triangles ci-contre sont considérés comme identiques.



1. Trouver un triangle magique de rang 3 en indiquant la somme commune des trois côtés sur votre copie.
2. Est-il possible de trouver un triangle magique dont la somme des trois chiffres d'un côté soit égale à 8 ?
3. Est-il possible de trouver un triangle magique dont la somme des trois chiffres d'un côté soit égale à 13 ?
4. On cherche à trouver tous les triangles magiques de rang 3.
   Considérons un triangle magique de rang 3. On note S la somme des trois chiffres sur chaque côté et on note s la somme des chiffres des 3 sommets.
   a. Montrer que $3S - s = 21$.
   b. En déduire que s est un multiple de 3.
5. Nous allons tester les différentes valeurs de s pour tester tous les cas possibles.
   a. Est-il possible que $s = 3$?
   b. Si $s = 6$, quels sont les nombres possibles sur les trois sommets ?
      Quelle est la valeur de S ?
      En déduire le triangle magique de rang 3 qui vérifie $s = 6$.
   c. Si $s = 9$, quels sont les nombres possibles sur les trois sommets ?
      Quelle est la valeur de S ?
      En déduire tous les triangles magiques de rang 3 qui vérifient $s = 9$.
   d. Poursuivre cette méthode jusqu'à obtenir tous les triangles magiques de rang 3.
      Établir la liste de tous les triangles magiques de rang 3.

PARTIE B : les triangles magiques de rang 4.

L'objectif de cette partie est de disposer les jetons numérotés de 1 à 9 sur un triangle de quatre cases de côtés de façon à ce que la somme des quatre chiffres sur chaque côté soit toujours la même.
Un triangle vérifiant ces conditions sera appelé **triangle magique de rang 4**.



1. Trouver un triangle magique de rang 4 en indiquant la somme commune des trois côtés sur votre copie.
2. On cherche à trouver tous les triangles magiques de rang 4. Considérons un triangle magique de rang 4. On note S la somme des quatre chiffres sur chaque côté et on note s la somme des chiffres des 3 sommets.
   a. Montrer que $3S - s = 45$.
   b. En déduire que s est un multiple de 3.
3. Nous allons tester les différentes valeurs de s pour tester tous les cas possibles.
   a. Est-il possible que $s = 3$?
   b. Si $s = 6$, quelles sont les nombres possibles sur les trois sommets ?
   Quelle est la valeur de S ?
   En déduire les deux triangles magiques de rang 4 qui vérifient $s = 6$.
4. Poursuivre cette méthode jusqu'à obtenir tous les triangles magiques de rang 4.
   Établir la liste de tous les triangles magiques de rang 4.
   Recopier et compéter le tableau de synthèse suivant avec autant de lignes que nécessaire :

Valeur de S	Valeur de s	Nombre de triangles magiques
…	6	2
…	…	…