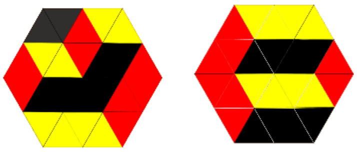
Exercice 1

Les calissons

PARTIE A :

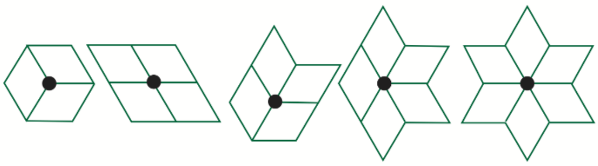
1.
2.

 etc…

PARTIE B :

1. L'aire d'un triangle équilatéral de côté 1 est $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D'où l'aire d'un calisson $\sqrt{3}$.
2. Le polygone régulier est constitué 6 triangles équilatéraux de côté n d'aire $\frac{\sqrt{3}}{2}n^2$. L'aire du polygone est donc $3n^2\sqrt{3}$.
3. Par quotient, il y a donc $3n^2$ calissons au total.
4. Pour cette partie, on peut remarques que les angles des calissons sont de 60° ou 120 °.
   a. Autour du sommet, la somme des angles est $4 \times 60 + 120 = 360$
   b. Autour du point la somme des angles est égale à 360°.
   D'où $60n + 120m = 360$ soit $n + 2m = 6$.
   De plus $60n \leq 360$ d'où $n \leq 6$ et $120m \leq 360$ d'où $m \leq 3$.
   c. En remarquant que $n + 2m = 6 \Leftrightarrow n = 6 - 2m$, l'algorithme permet déterminer les solutions entières de l'équation $n + 2m = 6$.

L'algorithme donne comme solutions : $(n, m) = (0,3)$; $(n, m) = (2,3)$; $(n, m) = (2,2)$; $(n, m) = (4,1)$ et $(n, m) = (6,0)$



   d. Pas difficile, on peut utiliser la question précédente pour gagner du temps. On complète les trous par des calissons.
   e. On conjecture qu'il y autant de calisson P_1, P_2, P_3.

PARTIE C :

1. Puisqu'il n'existe que trois couples de côtés parallèles dans l'hexagone régulier, il n'existe que trois types de chaînes qui les relie celles constituées des calissons P_1 et P_2, celles constituées des calissons P_2 et P_3 et celles constituées des calissons P_1 et P_3.
2. Pour chaque type de chaîne, On a n choix de départs pour chaque chaîne. Il y a donc n chaînes de chaque sorte. Il ne peut en avoir plus car sinon elles ne seraient pas disjointes.
3. On remarque qu'un calisson noir est l'intersection d'une chaîne de calissons de type 1 et de type 2.
   a. Un calisson noir ne peut être l'intersection de deux autres chaînes de calissons de type 1 et de type 2 car s'il l'était, il existerait deux chaînes de type 2 non disjointes ce qui est impossible.
   b. Pour une chaîne de type 1, il y a autant d'intersection que de chaînes de type 2. Il y a n points de départ pour les chaînes de type 2 donc n intersections.

c. Même type de raisonnement.

d. Comme il y a n chaînes de type 1, il y a n^2 intersections possibles avec les chaînes de type 2 soit n^2 calissons noirs.
On peut faire le même raisonnement avec les autres calissons. Il y a donc autant de calissons de chaque type, d'où le théorème.

Exercice 2

Les automates

PARTIE A : Échauffement.

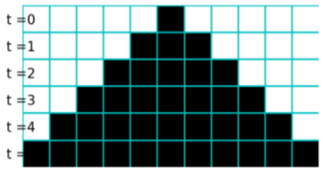


Figure 1: 5 premières étapes de la règle 254.

1. Voir figure ci-contre.
2. Lors de l'étape 6, il y a 13 cellules.
3. (A_n) est un suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1, donc $A_n = 1 + 2n$
4. $1 + 2n \geq 500 \iff n \geq 249{,}5$ donc à partir de l'étape 250.

PARTIE B : De nouvelles règles.

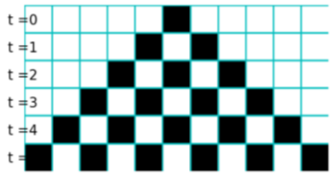


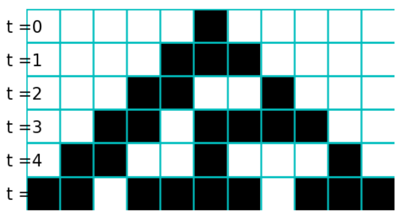
Figure 2 : 5 premières étapes de la règle 50.

1. Voir figure ci-contre.
2. Lors de l'étape 6, il y a 7 cellules.
3. (B_n) est un suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1, donc $B_n = 1 + n$.
4. $n + 1 \geq 500 \iff n \geq 499$ donc à partir de l'étape 499.

PARTIE C : On apprend à écrire de nouvelles règles.

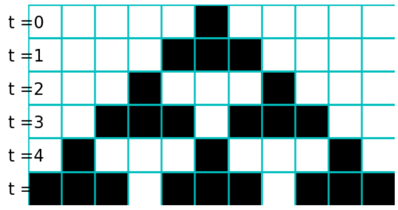
1. Pour chacun des 8 cas de la règle, il y a deux possibilités (noir ou blanc).
Il y a donc au total $2^8 = 256$ règles.
2.
 a. $126 = 2 \times 60 + 0$ $A = 0$ $N = 63$
 $63 = 2 \times 31 + 1$ $A = 10$ $N = 31$
 $31 = 2 \times 15 + 1$ $A = 110$ $N = 15$
 $15 = 2 \times 7 + 1$ $A = 1110$ $N = 7$
 $7 = 2 \times 3 + 1$ $A = 11110$ $N = 3$
 $3 = 2 \times 1 + 1$ $A = 111110$ $N = 1$
 $1 = 2 \times 0 + 1$ $A = 1111110$ $N = 0$

3.



Code binaire de 30 : 00011110

4.

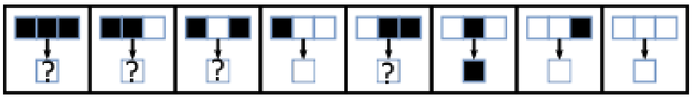


Code binaire de 54 : 00110110

5. Si N est impair, le premier reste dans l'algorithme est égal à 1.
Ainsi les trois cases blanches deviennent à l'étape suivante une case noire.
On obtient ainsi deux demi-droites noires à l'étape 2.

PARTIE D : On cherche à retrouver une règle.

1. Pour obtenir cette évolution, la règle est de ce type :



Il y a donc $2^4 = 16$ possibilités.

2. Voici les 16 règles en notation binaire :

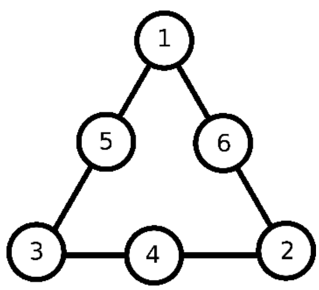
00001100	00101100	01001100	01101100	00000100	00100100	01000100	01100100
10001100	10101100	11001100	11101100	10000100	10100100	11000100	11100100

3. Voici les 16 règles en notation décimale

12	44	76	108	4	36	68	100
140	172	204	236	132	164	196	228

Exercice 3
Les triangles magiques – éléments de correction.

PARTIE A : les triangles magiques de rang 3.



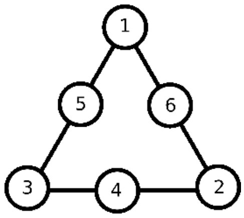
1. Voici, ci-contre, un triangle dont la somme des trois chiffres d'un côté est de 9
2. Non c'est impossible car sur un des côtés il faut placer le nombre 6, la somme minimale réalisable sur ce côté est de $6 + 1 + 2 = 9$. Le triangle ne peut donc pas être magique puisqu'un de ses côtés possède une somme (9) différente des autres (8).
3. Non c'est impossible car sur un des côtés il faut placer le nombre 1, la somme maximale réalisable sur ce côté est de $1 + 5 + 6 = 12$. Le triangle ne peut donc pas être magique puisqu'un de ses côtés possède une somme (12) différente des autres (13).
4.
   a. On sait que $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Or $3S - s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ car $3S$ donne la somme de tous les nombres sur le triangle magique en comptant deux fois les sommets du triangle. Ainsi en retirant ces 3 sommets une fois on obtient la somme des 6 premiers entiers naturels non nuls.

b. En utilisant la formule précédente on trouve : $s = 3S - 21$.
Or $3S$ et 21 sont des multiples de 3, donc leur différence aussi.

5.

a. Au minimum la somme des chiffres des 3 sommets est égale à $1 + 2 + 3 = 6$. C'est donc impossible que $s = 3$.

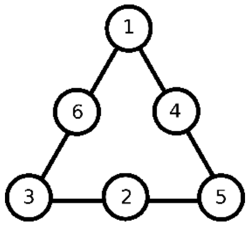
b. Si $s = 6$, les trois sommets sont obligatoirement 1, 2 et 3.



$$S = \frac{s + 21}{3}$$

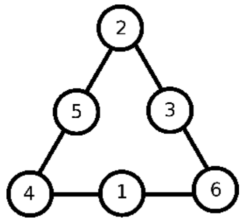
Ainsi, si $s = 6$ alors $S = 9$. Nous cherchons donc un triangle dont la somme de chaque côté est égale à 9.
La seule solution est le triangle ci-contre.

c. Si $s = 9$, alors $S = 10$.
Les nombres sur les sommets peuvent être : (1,2,6) ou (2,3,4) ou (1,3,5)
- pour (1,2,6) le nombre entre 1 et 2 doit forcément être 7 (1+2+7=10), ce n'est pas possible. Il n'est donc pas possible que 1,2 et 6 soient les sommets d'un triangle magique dont la somme de chaque côté est 10.
- pour (2,3,4) le nombre entre 3 et 4 doit forcément être 3 (3+4+3=10), ce n'est pas possible. Il n'est donc pas possible que 2,3 et 4 soient les sommets d'un triangle magique dont la somme de chaque côté est 10.



- pour (1,3,5) on peut trouver le seul triangle magique dont la somme est 10, le voici ci-contre.

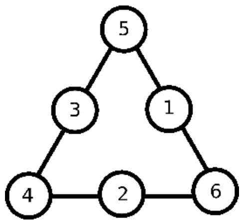
d. Si $s = 12$, les triplets de sommets sont (1,5,6) ; (2,4,6) ; (3,4,5).
$S = \frac{12+21}{3} = 11$.
En testant les trois triplets de sommets possibles, il n'y a que le triplet (2,4,6) qui fonctionne.



Si $s = 15$ (prochain multiple de 3) le seul triplet de sommets est (4,5,6).

$$S = \frac{15 + 21}{3} = 12$$

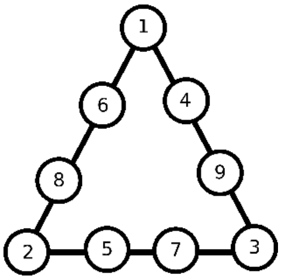
Un triangle magique fonctionne, voir ci-contre.



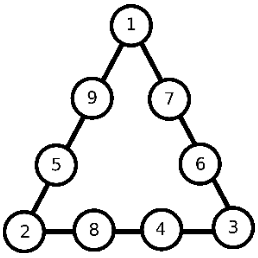
Et cela termine la liste puisque si $S \geq 18$ alors $s \geq 13$, or c'est impossible (voir 3.)
Il y a donc 4 triangles magiques de rang 3.

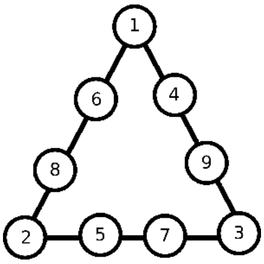
PARTIE B : les triangles magiques de rang 4.

1. Voici, ci-contre, un triangle magique de rang 4 et dont la somme de chaque côté est 17.

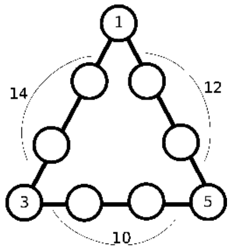


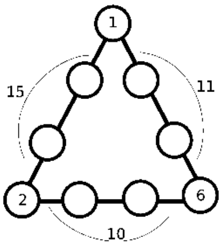
2.
   a. $3S - s$ donne la somme de tous les nombres du triangle magique comptés une seule fois.
   Donc $3S - s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{10 \times 9}{2} = 45$.
   b. $s = 3S - 45$, or 3S et 45 sont des multiples de 3, donc leur différence aussi.
3.
   a. $s = 3$ n'est pas possible car la plus petite somme possible pour les trois sommets est $1 + 2 + 3 = 6$.
   b. Si $s = 6$, le seul triplet de sommet possible est (1,2,3).
   $S = \frac{45+s}{3}$ et donc si $s = 6$ alors $S = 17$.
   Il y a deux triangles magiques de rang 4 dont la somme des côtés vaut 17. Les voici ci-dessous :



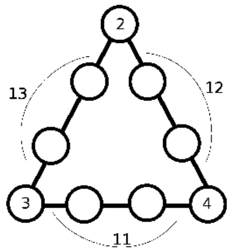


4. Si $s = 9$, il y a 3 triplets de sommets possibles : (1,3,5) ; (1,2,6) ; (2,3,4)
   $S = \frac{45+s}{3}$ et donc si $s = 9$ alors $S = 18$.
   - **Cas n°1** : si les sommets sont (1,3,5) alors il n'est pas possible de placer le nombre 9.
   En effet entre 1 et 3 la somme doit valoir 14 donc l'autre nombre serait 5 or 5 est déjà placé.
   De même, entre 1 et 5, si 9 est placé, l'autre nombre sera 3, c'est impossible.
   De même, entre 3 et 5, si 9 est placé, l'autre nombre sera 1, c'est impossible.





   - **Cas n°2** : si les sommets sont (1,2,6) alors il n'est pas possible de placer le 9.
   Entre 1 et 2, si on place le 9 alors l'autre nombre est 6, c'est impossible.
   Entre 1 et 6, si on place le 9 alors l'autre nombre est 2, c'est impossible.
   Entre 2 et 6, si on place le 9 alors l'autre nombre est 1, c'est impossible.
   - **Cas n°3** : si les sommets sont (2,3,4) alors il n'est pas possible de placer le 9.
   Entre 2 et 3, si on place le 9 alors l'autre nombre est 4, c'est impossible.
   Entre 3 et 4, si on place le 9 alors l'autre nombre est 2, c'est impossible.
   Entre 2 et 4, si on place le 9 alors l'autre nombre est 3, c'est impossible.

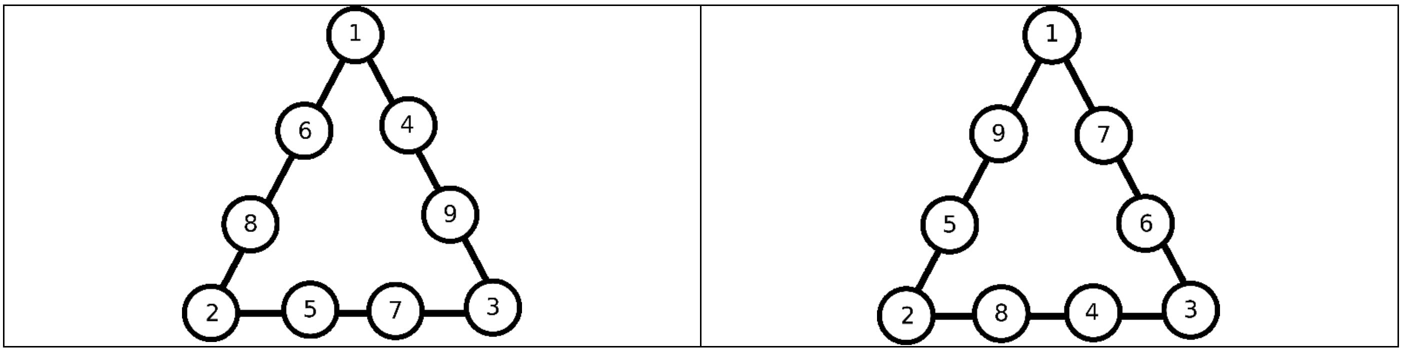


   Il n'y a donc aucun triangle magique de rang 4 dont la somme de chaque côté vaut 18.
   a. Les valeurs de s sont comprises entre 6 (1+2+3) et 24 (7+8+9) et sont multiples de 3.

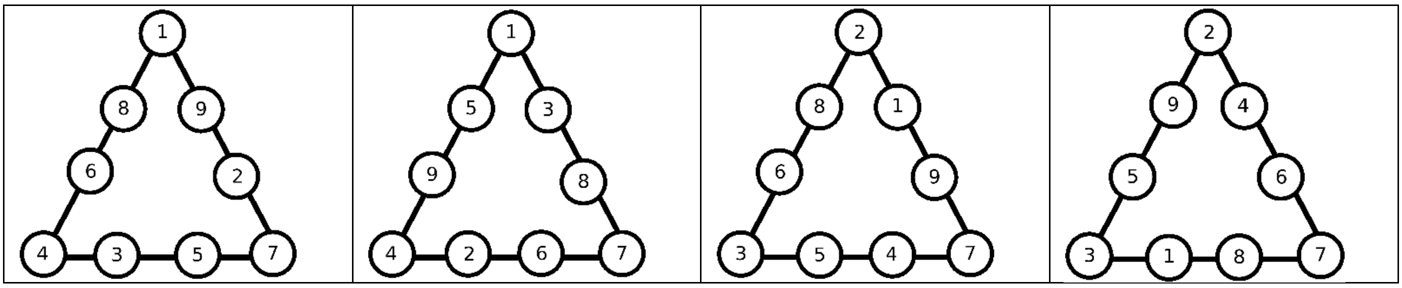
Valeur de S	Valeur de s	Nombre de triangles magiques
17	6	2
18	9	0
19	12	4
20	15	6
21	18	4
22	21	0
23	24	2

En tout il y a 18 triangles magiques de rang 4.

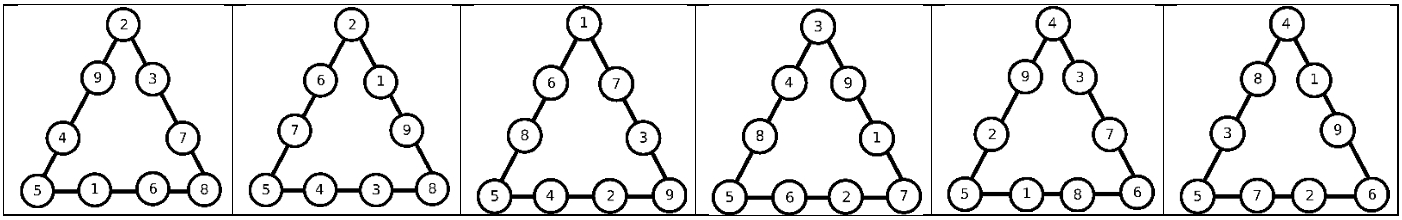
$S = 17$



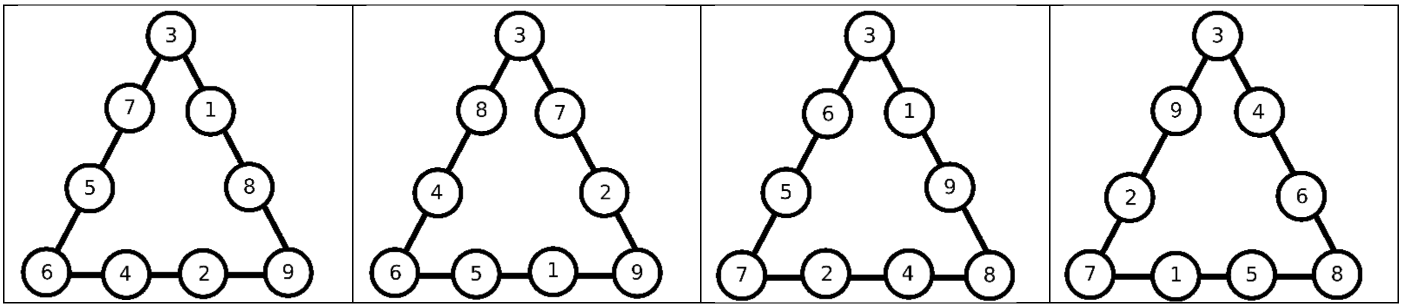
$S = 19$



$S = 20$



$S = 21$



$S = 23$