Inspection

Pédagogique

Régionale de

Mathématiques

Groupe académique « Enseigner les mathématiques avec le numérique »

« Le numérique et la démonstration »

Résumé : exploiter les apports des outils numériques pour soutenir la démonstration mathématique

Auteur : THIBAULT Claire (Lycée Dessaignes, Blois)

I DESCRIPTION

Classes : 2nde, 1ère S
Période : année 2013-2014
Mise en œuvre : souvent en 1/2-classe mais éventuellement en classe entière

Les instruments du cours de mathématiques se sont enrichis d'outils numériques (calculatrice, tableur, géométrie dynamique, calcul formel, langage de programmation). Ces nouveaux outils permettent une exploration bien plus compète des situations proposées que le papier/crayon (figures dynamiques, nombre d'applications numériques, de simulations...).
Les activités mathématiques doivent donc évoluer en tenant compte de ces nouveaux outils. Ainsi, les calculatrices ont déjà profondément modifié, entre autre, l'étude des fonctions en rendant facilement accessible leurs représentations graphiques.
L'objectif est de ne plus se contenter d'utiliser ces outils comme un papier-crayon numérique mais de tenir compte de leurs apports et de leurs forces pour faire évoluer l'enseignement des mathématiques en apportant un pas intermédiaire vers la démonstration et d'amener les élèves à avoir une utilisation plus autonome des outils numériques.

Les activités proposées aux élèves sont de différents types :

- prise en main du ou des outils : un préalable à ne pas oublier car les élèves ne maîtrisent pas forcément ces outils numériques. Cette période de prise en main oblige les TD à être un peu directifs ;

- une utilisation guidée :
  - utiliser l'outil pour conjecturer ;
  - utiliser l'outil pour mettre à l'épreuve des conjectures : déplacement des points, utilisation des outils de comparaison ou de mesure des objets, calcul d'un grand nombre de valeurs,... ;
  - utiliser l'outil pour vérifier : résolution graphique/algébrique d'une (in)équation, contrôle de calcul de longueur ou d'aire à l'aide de l'outil de géométrie dynamique, simulation d'épreuves aléatoires se confrontant aux résultats théoriques de probabilités… ;
  - utiliser l'outil pour trouver des idées pour faire la démonstration (en travaillant avec une succession de conjectures puis démonstrations) ;

- une utilisation autonome : laisser les élèves décider de se tourner (ou pas) vers des outils numériques pour étudier une situation.

II DOCUMENTS

- conjecture et mise à l'épreuve : exploiter GeoGebra pour identifier des transformations du plan. Les élèves mettent en évidence les propriétés (point(s) fixe(s), longueurs égales, parallélisme…) de ces transformations. (2nde)
- vérifier une théorie : confronter des calculs de probabilités et d'espérance à des simulations (1ère S).
- vérifier des calculs, conjecturer puis démontrer : une figure GeoGebra permet de conjecturer une position minimale et de vérifier les calculs effectués ensuite. (2nde)
- trouver des idées pour faire une démonstration : une démonstration exploitant la figure pour chercher des idées. (1ère S)
- un pas vers l'autonomie : deux exercices consécutifs. Le premier demandant une simulation dans GeoGebra, le suivant restant libre. (1ère S)

III RETOUR D’EXPERIENCE

Difficultés de mise en œuvre pour l’enseignant

- Si tous les manuels proposent des TP TICE, ils sont souvent très directifs pour tout ce qui concerne la construction de la simulation et n'invitent pas les élèves à exploiter ces simulations pour travailler les démonstrations mais seulement à émettre des conjectures sans même leurs demander de justifier cette conjecture (construction d'un point fixe, de la courbe conjecturée pour le lieu d'un point,…). Il est donc difficile de trouver des situations adaptées aux objectifs visées.

- Dans ce type d'activité, le support utilisé par l'élève étant en partie numérique, la trace que l'élève obtient est elle aussi à adapter par l'enseignant. Elle peut prendre plusieurs formes :
  - une synthèse papier avec reproduction manuelle ou impression de la « simulation » (au sens large : une figure dynamique pourrait être une simulation). L'impression nécessite un équipement qui n'est pas toujours disponible (voire impossible pour les calculatrices) et délicate à gérer quand 18 impressions sont faites quasiment simultanément ;
  - une synthèse mixte : l'élève conserve le fichier support des recherches dans ses documents sur le réseau d'établissement et la synthèse sur papier. Rouvriront-ils leurs « simulations » ? Disposeront-ils du logiciel adéquat ?
  - une synthèse sous forme numérique : l'élève conserve le fichier de recherches et rédige sa synthèse dans un éditeur de texte, insère des images issues des « simulations » (export ou copie d'écran). Cependant, la saisie des formules mathématiques risque de rendre ce travail assez lourd ;
  - on peut également imaginer une synthèse orale filmée.

Difficultés de mise en œuvre pour les élèves

- Distinguer les objets fixes des objets variables est difficile pour les élèves, ce qui amène à des simulations qui ne sont pas pertinentes par rapport à la situation à étudier. Cette difficulté est particulièrement sensible lorsqu'une figure est proposée dans l'énoncé car les élèves ont tendance à chercher à reproduire celle-ci sans lire les données de l'énoncé.

- Pour arriver à une utilisation autonome, il faut d'une part que l'outil soit bien maîtrisé par les élèves, d'autre part qu'il soit à disposition des élèves et qu'ils osent s'en servir. Cette deuxième condition est facilement remplie par la calculatrice mais pas par les outils disponibles uniquement sur les ordinateurs.

  On peut imaginer différentes stratégies pour les laisser prendre des initiatives :
  - poser un problème qu'ils ne peuvent résoudre sans recherches à l'aide d'outils numériques : l'enseignant demande aux élèves de trouver des idées pour se lancer dans des recherches. Le déplacement en salle informatique pourra être un élément favorisant les idées liées aux outils numériques ;

- proposer une série d'exercices, le premier utilisant un outil numérique mais pas les suivants.

IV ANALYSE DE L'ENSEIGNANT

Les élèves n'ont pas l'habitude de ce type d'activité. Les conjectures possibles ne leur sont pas e naturelles. Ils ne savent souvent pas de quel côté chercher et encore moins justifier leurs conjectures. L'implication des élèves est satisfaisante tant qu'il s'agit de réaliser une figure à l'aide d'un outil de géométrie dynamique puis de la manipuler, elle est moindre dans les autres types de travaux à cause des difficultés à surmonter.

V CONCLUSION

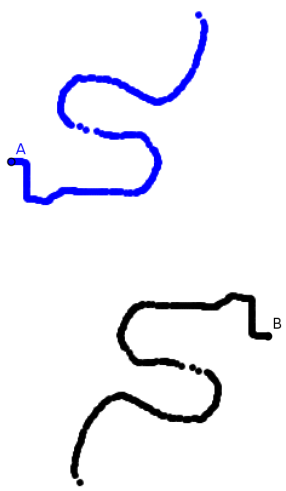
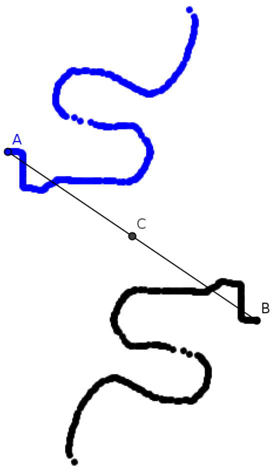
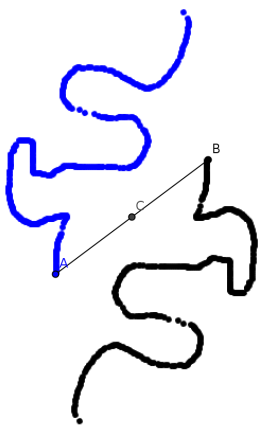
Suites envisagées :

Les TP proposés aux élèves n'ont jamais été évalués. Il serait pourtant intéressant de le faire. Les outils numériques désormais à notre disposition (réseau d'établissement ou moodle) permettant des échanges faciles entre élèves et enseignant, les productions pourraient être numériques elles-même. On peut par ailleurs envisager de proposer une évaluation par les pairs ainsi que de faire améliorer les productions après une première évaluation.

Annexes

Conjecture et mise à l'épreuve
En 2nde , activité de découverte de la translation

Déterminer la nature d'une transformation :
Les points A et B sont liés : lorsqu'on déplace le point A, le point B se déplace. Selon quelle transformation ?

Expérimentation : on déplace A et on observe les traces des points A et B	Conjecture : A et B sont symétriques par rapport à C (qu'on obtient en construisant le milieu de [AB])	Mise à l'épreuve de la conjecture : on déplace A. Le point C reste fixe
		

(transformation_1.ggb, transformation_2.ggb, transformation_3.ggb, transformation_4.ggb)

Vérifier des calculs, conjecturer puis démontrer
En 2nde, algébriser un problème géométrique et travailler sur les fonctions du 2nd degré -

$ABCD$ est un carré de côté 10 cm. On place un point L sur $[AB]$ puis le point P de $[AD]$ tel que $DP=AL$.

On note x la longueur AL en cm et $f(x)$ l'aire de CPL en cm^2.

1. Faire une figure dans GeoGebra.

2. Comment varie l'aire de CPL ?

   Dans la suite, vous vous attacherez à vérifier TOUS vous résultats à l'aide de cette figure et des fonctionnalités de GeoGebra.

3.

   (a) Calculer, en fonction de x , les aires des triangles CDP , PAL et LBC . En déduire

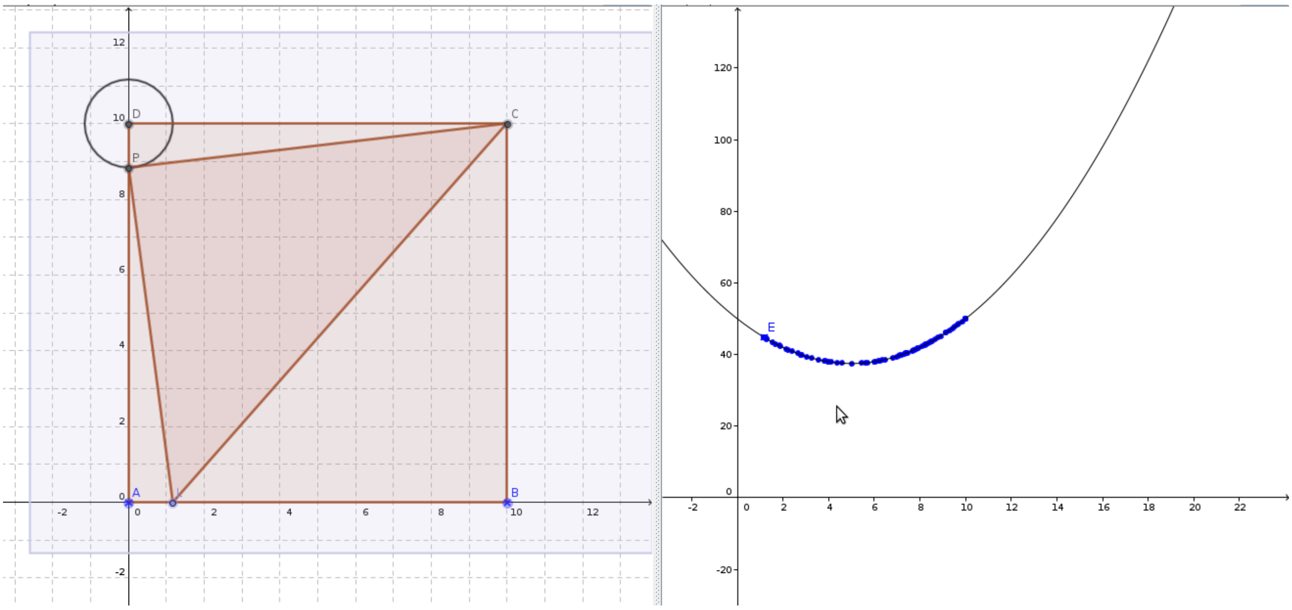
$f(x)$ en fonction de x. Quelle est la nature de f ?

(b) Faire tracer dans GeoGebra la courbe représentant f et placer le point E de coordonnées (AL, aire de CPL). (On pourra placer ces deux éléments dans le graphique 2 en modifiant les propriétés de ces objets). Que doit vérifier E ?

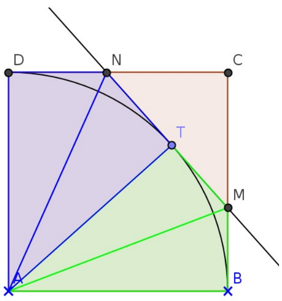
4.

(a) Résoudre $f(x)=50$.

(b) En déduire le tableau de variation de f.



Trouver des idées pour faire une démonstration
En 1S : algébriser une situation géométrique, étude de fonction



ABCD est un carré. Γ est le quart de cercle de centre A et de rayon AB contenu dans le carré ABCD. T est un point quelconque de Γ. La tangente en T à Γ coupe [BC] en M et [CD] en M.

Problème : Où placer T pour que MN soit minimale ?

1.

a) Montrer que BM=MT =x et DN=NT=y.

b) Exprimer MN en fonction de x et y de deux façons différentes.

c) En déduire MN en fonction de x.

2. Conclure.

La première question a amené à faire beaucoup de conjectures pour obtenir les égalités demandées : les triangles sont rectangles, sont égaux, ont la même aire, AT=AB…

---

vérifier une théorie
En 1S : probabilité et algorithme (DM)

Dans un jeu de pile ou face, on gagne le double de la mise si on obtient pile, on perd la mise si on obtient face.
Un joueur adopte la technique suivante : il commence par miser un euro, double sa mise tant qu'il perd et ne s'arrête que s'il gagne.

1. Le joueur dispose d'un budget de 30 €. Soit X la variable aléatoire donnant la somme bilan (gain, mises déduites) du joueur (et de sa technique) à l'issue du jeu.
   a) Proposer un arbre pondéré représentant la situation.
   b) Donner la loi de probabilité de X.
   c) Calculer l'espérance de gain du joueur.

2. On propose l'algorithme suivant pour simuler la situation :

```
Variables : piece, budget, mise
Début
    entrer budget
    mise prend la valeur 1
    piece prend la valeur 0
    tant que (budget >= mise et piece=0) faire
        budget prend la valeur budget-mise
        piece prend une valeur aleatoire 0 ou 1
        Si piece=1
        Alors
            budget prend la valeur budget+2*mise
        Fin du si
        mise prend la valeur 2*mise
    fin tant que
    afficher budget
Fin
```

   a) Entrer cet algorithme dans la calculatrice. Le tester pour un budget de départ de 30 €.
   b) Modifier cet algorithme afin de faire 10 parties successives. L'algorithme doit être écrit sur la copie et rester dans la calculatrice.
   c) Quelle est la situation la plus fréquente (gagner ou perdre) ? Expliquer pourquoi ce résultat reste cohérent avec l'espérance calculée à la question 1.c).

Un pas vers l'autonomie
En 1S : équation de cercle et orthogonalité

EXERCICE 1

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, pour tout nombre m on considère les points $M(4+m;0)$,

$N(0;4-m)$ et I le milieu de $[MN]$. On note C_m le cercle de diamètre $[MN]$.

5. Dans GeoGebra, créer un curseur m , les points M , N et I et le cercle C_m .

6. Lorsqu'on fait varier m , comment se déplace le point I ? Quelle particularité semblent présenter les cercles C_m ?

7. Démontrer les conjectures précédentes.

EXERCICE 2

On se place dans un repère orthonormé. Soit C le cercle de centre $A(5;-2)$ et de rayon 5. Soit B le point de coordonnées $(6;0)$.

Le but de l'exercice est de construire avec précision les deux tangentes au cercle C passant par le point B et d'évaluer sous quel angle est le cercle C depuis le point B .

1. Si E est un point de C tel que (BE) soit une tangente à C , démontrer que E est sur le cercle de diamètre $[AB]$.

2. Calculer les coordonnées des points E et F tels que (BE) et (BF) soient tangentes à C .

3. En calculant $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}$ de deux façons différentes, déterminer une mesure de $\widehat{BEF}$.