Multiplication des nombres relatifs

1. Comment introduire le produit de nombres relatifs en classe de quatrième ?

L'écriture sans parenthèse et sans signe + d'un nombre décimal positif permet d'introduire le produit de deux nombres positifs, il reste donc à introduire le produit de deux nombres décimaux relatifs de signes différents et le produit de deux nombres décimaux relatifs négatifs.

Dans le cas d'entiers relatifs, par itération de la somme on peut effectuer le produit d'un positif par un négatif :

$$(-3)\times(+5)=(-3)\times5=(-3)+(-3)+(-3)+(-3)+(-3)=(-15).$$

On peut donc énoncer la règle suivante :
Le produit d'un entier relatif positif par un entier relatif négatif est un nombre négatif dont la distance à zéro est égale au produit des distances à zéro.

On peut même étendre au produit d'un décimal relatif négatif par un entier relatif positif

$$(-3,2)\times(+5)=(-3,2)\times5=(-3,2)+(-3,2)+(-3,2)+(-3,2)+(-3,2)=(-16).$$

Note : On pourrait croire que l'on peut encore généraliser au produit de deux décimaux relatifs de signes différents en utilisant le principe de permanence à la propriété des décimaux positifs :

$$\frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b}=a\times\frac{c}{b}$$

$$(-3,2)\times(+5,1)=(-3,2)\times 5,1=(-3,2)\times\frac{51}{10}=\frac{(-3,2)\times 51}{10}=\frac{(-163,2)}{10}$$

Il faudrait alors avoir recours aux égalités $(-163,2)=(-1)\times(+163,2)$ *ou* $\frac{(-163,2)}{10}=-16,32$ *que l'on ignore.*

Même si on peut décider de généraliser la règle au produit de deux décimaux relatifs de signes différents, comment légitimer la règle du produit de deux négatifs ?
Les manuels scolaires font alors souvent référence à la calculatrice.
On rencontre dans un ouvrage (Collection TRIANGLE HATIER) une introduction à l'aide d'un tableau où sont représentés les multiples consécutifs d'entiers relatifs :

5					0	5	10	15	20	25
4					0	4	8	12	16	20
3					0	3	6	9	12	15
2					0	2	4	6	8	10
1					0	1	2	3	4	5
0					0	0	0	0	0	0
-1					0					
-2					0					
-3					0					
-4					0					
	-4	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

Les zones orange et verte du tableau se complètent par la recherche des multiples négatifs de 1, 2, 3, 4 et 5. Puis, on complète de la même manière la zone bleue. On termine en faisant le lien avec le produit. Cette méthode a l'avantage de clarifier en partie le produit de deux entiers relatifs négatifs mais possède l'inconvénient de se limiter aux entiers relatifs.

Une autre approche est encore possible à l'aide de courroies ou d'engrenages mais sa compréhension ne semble pas accessible à une grande partie des élèves.

Existe-t-il une introduction du produit des relatifs plus performante ? Les nouveaux programmes qui seront mis en place en classe de quatrième à la rentrée 2007 nous apportent des éléments de réponses :

« Toute étude théorique des propriétés des opérations est exclue. Les élèves ont une pratique de la multiplication des nombres positifs en écriture décimale ou fractionnaire. Les calculs relevant de ces opérations sont étendus au cas des nombres relatifs. Les justifications se limitent à l'observation de l'extension de tables de multiplication ou à la généralisation de règles provenant de l'addition (par exemple 3x (-2) = (-2)+(-2)+(-2) = (-6), et à l'appui, sur des exemples, sur la nécessité de la cohérence de la règle des signes avec la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. »

Les remarques faites précédemment sont conformes à l'esprit du programme, mais intéressons-nous à la dernière phrase et plus particulièrement la partie concernant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Dans un premier temps, considérons la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition des décimaux positifs. En classe de cinquième, les élèves sont initiés à la relation :
Si a, b et k désignent des décimaux positifs alors :

$$k\ (a+b) = ka + kb.$$

Si ***k* est un entier**, on peut justifier cette propriété par itération de l'addition :

$$2 \times (3{,}1 + 4{,}5) = (3{,}1 + 4{,}5) + (3{,}1 + 4{,}5) = (3{,}1 + 3{,}1) + (4{,}5+4{,}5) = (2 \times 3{,}1) + (2 \times 4{,}5)$$

Si ***k* est un décimal**,

$$2{,}7 \times (3{,}1 + 4{,}5) = \frac{27}{10} \times (3{,}1 + 4{,}5)$$
$$2{,}7 \times (3{,}1 + 4{,}5) = \frac{27 \times (3{,}1 + 4{,}5)}{10}$$
$$2{,}7 \times (3{,}1 + 4{,}5) = \frac{27 \times 3{,}1 + 27 \times 4{,}5}{10}$$
$$2{,}7 \times (3{,}1 + 4{,}5) = \frac{27 \times 3{,}1}{10} + \frac{27 \times 4{,}5}{10}$$
$$2{,}7 \times (3{,}1 + 4{,}5) = \frac{27}{10} \times 3{,}1 + \frac{27}{10} \times 4{,}5$$
$$2{,}7 \times (3{,}1 + 4{,}5) = 2{,}7 \times 3{,}1 + 27 \times 4{,}5$$

Les calculs présentés ne sont que des exemples mais peuvent être généralisés à tous décimaux k, a et b.

Dans un deuxième temps, considérons la multiplication des décimaux relatifs. On souhaite créer une multiplication des décimaux relatifs qui soit cohérente avec les calculs que nous connaissons déjà et qui respecte la distributivité par rapport à l'addition (principe de permanence).

Le produit de deux décimaux positifs est connu.

Produit d'un décimal positif par un décimal négatif

Exemple :

Calculer le nombre p = (-8) × (+5)

[(-8) + (+8)] × (+5) = (-8) × (+5) + (+8) × (+5) (principe de permanence)

d'où 0 × (+5) = p + (+40) (substitution)

0 = p + (+40) (substitution)

0 = p + 40

Ainsi, p est l'opposé de 40 donc p = - 40.

Produit d'un décimal négatif par un décimal négatif

Exemple :

Calculer le nombre p = (-8) × (-5)

[(-8) + (+8)] × (-5) = (-8) × (-5) + (+8) × (-5) (principe de permanence)

d'où 0 × (-5) = p + (-40) (substitution)

0 = p + (-40) (substitution)

0 = p - 40

Ainsi, p = 40.

Ici encore, les règles sont vérifiées sur des exemples (d'entiers relatifs), ils n'ont donc pas valeurs de preuve. Cependant, on peut convaincre les élèves que le raisonnement mis en œuvre ici se généralise à tous décimaux relatifs.

On peut alors énoncer :

Le produit d'un décimal relatif positif par un décimal relatif négatif est un nombre négatif dont la distance à zéro est égale au produit des distances à zéro.

Le produit de deux décimaux relatifs de même signe est un nombre positif dont la distance à zéro est égale au produit des distances à zéro.

Pour certaines classes, on pourra procéder à une justification plus rigoureuse.

On montrera dans un premier temps que le produit d'un décimal relatif par zéro est égal à zéro.

Si a et b désignent deux décimaux relatifs quelconques :

$a \times (0 + b) = a \times 0 + a \times b$ (distributivité et principe de permanence)

$a \times b = a \times 0 + a \times b$ (substitution)

d'où $a \times 0 = 0$ (par définition de la soustraction)

Maintenant, considérons n et p deux décimaux **positifs.**

Le produit $n \times p$ est connu.

Produit $(-n) \times p$

$(-n)\times p+n\times p=[(-n)+n]\times p$ (distributivité et principe de permanence)

$(-n)\times p+n\times p=0\times p$ (somme de deux opposés et substitution)

$(-n)\times p+n\times p=0$ (substitution)

ainsi $(-n)\times p$ et $n\times p$ sont opposés d'où $(-n)\times p=-n\times p$

Produit $(-n)\times(-p)$

$(-n)\times(-p)+n\times(-p)=[(-n)+n]\times(-p)$ (distributivité et principe de permanence)

$(-n)\times(-p)+n\times(-p)=0\times(-p)$ (somme de deux opposés et substitution)

$(-n)\times(-p)+n\times(-p)=0$ (substitution)

ainsi $(-n)\times(-p)$ et $n\times(-p)$ sont opposés d'où $(-n)\times(-p)=-[n\times(-p)]$
comme $n\times(-p)=-n\times p$
et que l'opposé de l'opposé d'un relatif est égal à lui-même on a $(-n)\times(-p)=n\times p$.

L'intérêt de cette justification est qu'avec les mêmes raisonnements on peut prouver que :
si a et b désignent des **décimaux relatifs quelconques :**

$$a(-b)=-(ab)$$
$$(-a)b=-(ab)$$
$$(-a)(-b)=ab$$

2. Quotients de deux décimaux relatifs

A partir du produit de deux décimaux relatifs on détermine facilement les règles de calcul du quotient de deux décimaux relatifs. On définit le quotient de deux décimaux relatifs de la même manière que le quotient de deux nombres positifs.
Le quotient de deux décimaux positifs est donc connu.

Exemples de quotients d'un décimal positif et d'un décimal négatif.

$\frac{-5}{3}$ est l'unique nombre qui multiplié à 3 donne -5. Or, $3\times\left(-\frac{5}{3}\right)=-5$. Donc $\frac{-5}{3}=-\frac{5}{3}$.

De même, $\frac{5}{-3}$ est l'unique nombre qui multiplié à -3 donne 5. Or, $(-3)\times\left(-\frac{5}{3}\right)=5$. Donc, $\frac{5}{-3}=-\frac{5}{3}$.

Au passage, on a vérifié $\frac{-5}{3}=\frac{5}{-3}=-\frac{5}{3}$.

Exemple de quotient de deux décimaux relatifs négatifs.

De même, comme $(-3)\times\frac{5}{3}=-5$, on a $\frac{-5}{-3}=\frac{5}{3}$.

Avec exactement le même raisonnement, on prouve que :

Si n et p sont deux décimaux **positifs** (avec p non nul) : $\frac{-n}{p} = \frac{n}{-p} = -\frac{n}{p}$ et $\frac{-n}{-p} = \frac{n}{p}$.

Si a et b sont deux décimaux **relatifs** (avec b non nul) : $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ et $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$

3. Puissances de décimaux relatifs

Dans les nouveaux programmes, la notion est introduite en classe de quatrième et son apprentissage se poursuit en classe de troisième.
En classe de quatrième, les élèves connaissent déjà les notations $a^2 = a \times a$ et $a^3 = a \times a \times a$. On généralise la notation a^4, a^5, … où a est un décimal relatif.
Un travail sur la notation d'une puissance permet d'introduire des égalités du type :

$$a^2 \times a^3 = a^5 \qquad (a \times b)^2 = a^2 \times b^2 \qquad \frac{\mathrm{a}^5}{\mathrm{a}^3} = a^2 \qquad \left(\mathrm{a}^2\right)^3 = a^6$$

Les cas particuliers $1 = \frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$ et $a = \frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a^1$ permettent d'introduire les notations a^0 et a^1.
Il n'y a aucune précision dans le nouveau programme concernant le signe d'une puissance mais il précise « Les résultats sont obtenus en s'appuyant sur la signification de la notation puissance et non par l'application de formules. » ce qui tend à croire que l'élève doit retrouver le signe de son résultat au détriment de la récitation d'une règle dont le sens lui échappe parfois.

Dans le cas des exposants négatifs, les élèves connaissent déjà les notations de l'inverse $\frac{1}{a}$ et a^{-1}.
Des remarques du type, $\left(a^{-1}\right)^3 = \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a \times a \times a} = \frac{1}{a^3}$ et le principe de permanence de la propriété de la puissance d'une puissance donnent $\left(a^{-1}\right)^3 = a^{(-1) \times 3} = a^{-3} = \frac{1}{a^3}$, ce qui permet de légitimer la notation a^{-n}.