Exercice 1 (série S) :

1. Soit *h* la hauteur du cylindre et *r* son rayon (exprimé en cm).

D'où *h* = 6*r*.

Le volume du cylindre est $V_1 = \pi r^2 \times h = 6\pi r^3$

Le volume d'une sphère est $V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$

D'où $V_1 = 3V_2 + 1000$

$$6\pi r^3 = 4\pi r^3 + 1000$$

Donc $r^3 = \frac{1000}{2\pi}$ d'où $r \approx 5{,}4\,cm$.

2. Soit V_3 le volume du cône, la hauteur du cône est donc $h - 2r$

On obtient $V_1 = V_2 + V_3 + 1000$

$$\pi r^2 h = \frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 \times (h - 2r) + 1000$$

$$3\pi r^2 h = 4\pi r^3 + \pi r^2 h - 2\pi r^3 + 3000$$

$$2\pi r^2 h = 2\pi r^3 + 3000$$

a) $h = \frac{2\pi r^3 + 3000}{2\pi r^2}$

D'où <u>pour *r* = 5 cm</u>, on a $h \approx 24{,}1cm$.

b) pour *h* = 20 cm

On obtient l'équation : $2\pi r^3 - 40\pi r^2 + 3000 = 0$

En utilisant la calculatrice : on obtient 3 valeurs : $r_1 \approx -4{,}4$, $r_2 \approx 5{,}8$ et $r_3 \approx 18{,}6$

Seul r_2 est possible $(0 \langle r \langle 10)$

Exercice 2 (série S) ou 4 (autres séries) :

<u>Un partage équitable</u>

1. Les deux triangles rectangles ont même aire : $\frac{1 \times x}{2}$, et on souhaite que chacune soit égale au tiers de l'aire du carré, donc égale à $\frac{1}{3}$; l'aire du quadrilatère restant valant alors également 1>3. Il s'agit donc de résoudre l'équation $\frac{1 \times x}{2} = \frac{1}{3}$, soit $x = \frac{2}{3}$.

2. Cette fois, on veut que l'aire du triangle rectangle $\frac{1 \times x}{2}$ soit égale au tiers de l'aire du carré de côté 1 privé du triangle rectangle isocèle de côté (1-x) . Il s'agit donc de résoudre l'équation $\frac{1 \times x}{2} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{(1\text{-}x)^2}{2}\right)$ soit $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}62$

3. En se plaçant dans le repère orthonormal (A ;$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$) adapté à la figure, on écrit les équations des droites :

   (AC) : $y = x$

   (HJ) : $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

   (DI) : $y = 1 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} x$

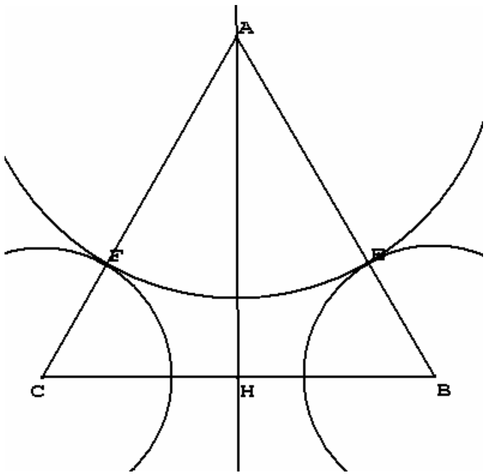
   Si on appelle P le point d'intersection des droites (AC) et (HJ) , ses coordonnées sont $x_P = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = y_P$ .Elles vérifient l'équation de la droite (DI) car :

   $1 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} x_P = 1 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \times \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 1 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{2\sqrt{5} - 2}{4} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = y_P$

   Les trois droites sont donc bien concourantes.

Exercice 3 (série S) :

1. Soit r = 24 m la longueur commune des cordes des trois chèvres. La superficie broutée par les chèvres est
$S = 3\times\frac{1}{6}\pi r^2 = 3\times\frac{1}{6}\pi\times 24^2 = 288\pi \approx 904{,}78\ \text{m}^2$.



2. Soit r = 32 m la longueur de la corde d'une des chèvres. Les autres chèvres ont alors une corde de longueur r' = 48-32=16 m. la superficie broutée par les chèvres est donc :
$S = \frac{1}{6}\pi r^2 + 2\times\frac{1}{6}\pi r'^2 = \frac{1}{6}\pi\times 32^2 + 2\times\frac{1}{6}\pi\times 16^2 = \frac{768}{3}\pi \approx 804{,}25\,\text{m}^2$.
3. Soit x (en m) la longueur de la corde attachée en A. Alors les cordes des deux autres chèvres, attachées en B et C sont de longueur $48 - x$.
Avec les conditions énoncées, on a :
$$\frac{1}{2}\times 48 \le x \le \frac{\sqrt{3}}{2}\times 48$$
car $\frac{\sqrt{3}}{2}\times 48$ représente la distance AH, soit $24 \le x \le 24\sqrt{3}$.
La superficie broutée par les trois chèvres est alors
$S(x) = \frac{1}{6}\pi x^2 + 2\times\frac{1}{6}\pi(48-x)^2 = \frac{1}{2}\pi\left(x^2 - 64x + 1536\right)$.
La dérivée de cette fonction est $S'(x) = \pi(x-32)$.
Le tableau de variation de $S(x)$ est

x	24		32		$24\sqrt{3}$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$	$S(24)$	$\searrow$	$S(32)$	$\nearrow$	$S\left(24\sqrt{3}\right)$

Le maximum est atteint pour $S(24)$ ou $S(24\sqrt{3})$. Or $S(24) \approx 904{,}78$ et $S(24\sqrt{3}) \approx 948{,}09$ alors la superficie broutée est maximale si une des chèvres a une corde de $24\sqrt{3} \approx 41{,}57$ m et la longueur des autres cordes est $48 - 24\sqrt{3} \approx 6{,}43$ m.

Exercice 4 (série S) ou 2 (autres séries) :

Les bons nombres

1. Parmi les nombres de 1 à 10, seuls 1, 4, 9 et 10 sont « bons » :

$1=1$ et $\frac{1}{1} = 1$ $4 = 2 + 2$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ $9 = 3 + 3 + 3$ et $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ $10 = 4 + 4 + 2$ et $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$

Pour les autres nombres, on examine toutes les décompositions possibles (en évitant celles comportant un 1 ou deux 2, qui n'aboutiront pas) pour se rendre compte qu'ils sont « mauvais ».

2. Si n est le carré d'un entier naturel, on peut écrire $n = k^2 = k \times k = k + k + \ldots k$.
Alors $\frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \ldots + \frac{1}{k} = k \times \frac{1}{k} = 1$, ce qui montre que n est « bon ».

3. Si n est « bon », il peut s'écrire comme somme de nombres dont la somme des inverses vaut 1 : $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$ avec $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} = 1$

Alors on peut écrire 2n+2 comme somme de 2 et du double de chacun des nombres intervenant dans la décomposition de n :

$$2n+2 = 2 + 2\sum_{i=1}^{k} a_i = 2 + \sum_{i=1}^{k} 2a_i$$

et $\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2a_i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ donc 2n+2 est « bon »

On peut écrire 2n + 9 comme somme de 3, de 6 et du double de chacun des nombres intervenant dans la décomposition de n :

$$2n+9 = 3 + 6 + 2\sum_{i=1}^{k} a_i = 3 + 6 + \sum_{i=1}^{k} 2a_i$$

et $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2a_i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ donc 2n+9 est « bon »

4. Si $24 \le n \le 56$ alors 2n+2 est un nombre pair compris entre 50 et 114, qui est « bon » d'après la question précédente.

Si $24 \le n \le 56$ alors 2n+9 est un nombre impair compris entre 57 et 121, qui est « bon » d'après la question précédente.

En admettant que tous les nombres compris entre 24 et 56 sont « bons », on vient de justifier que les nombres compris entre 57 et 115 sont tous « bons ». On peut alors reprendre le raisonnement précédent, avec une liste de « bons nombres » compris entre 24 et 115… A chaque étape, on obtient une nouvelle liste « sans trou » de bons nombres, pairs ou impairs, dont le plus grand élément est au moins deux fois supérieur à celui de la liste précédente : tous les nombres entiers supérieurs à 56 sont « bons ».