Suites et matrices

Terminale scientifique

mathématiques spécialité

Rentrée 2012

Un enseignement qui prend appui sur la résolution de problèmes

Le programme de l'enseignement de spécialité de la terminale scientifique ramène l'algèbre linéaire au lycée. Mais l'algèbre linéaire du lycée des années 1980 s'appuyait sur les vecteurs du plan et de l'espace, et l'introduction des espaces vectoriels. L'entrée proposée aujourd'hui est matricielle : il s'agit de faire jouer un rôle à des tableaux de nombres, lorsqu'ils sont particulièrement adaptés à l'écriture et à la résolution de certains problèmes.

La première partie du présent document présente donc des problèmes. Les matrices et les puissances de matrices qui peuvent y être introduites n'ont pas besoin d'un cadre plus général que celui dans lequel elles apparaissent. Le vocabulaire nouveau est introduit en situation. Les définitions et les théorèmes auxquels il est nécessaire de faire référence ne sont pas nécessairement sortis du contexte du problème.

Une petite mise en ordre est proposée dans la seconde partie. Des définitions convenables et des théorèmes bien rédigés sont en effet indispensables au jalonnement des avancées mathématiques. Les professeurs dont le penchant serait d'aller de la théorie à la pratique, du cours aux exercices, des théorèmes aux applications, sont invités à **ne pas démarrer bille en tête par les contenus exposés dans cette seconde partie,** mais à essayer la démarche proposée. Outre qu'elle répond à une instruction officielle, cette démarche semble plus susceptible d'**accrocher des élèves qu'il s'agit de conquérir** et de convaincre de l'intérêt pour eux de la poursuite d'études scientifiques : les théorèmes, c'est ce qu'on écrit quand la recherche est, au moins partiellement, achevée.

Cette base permet une présentation d'autres contenus du programme, en se situant de nouveau dans le contexte de problèmes. La troisième partie développe plus complètement certains thèmes mentionnés comme exemples dans le programme, et ouvre des perspectives pour aborder d'autres sujets. On y trouvera notamment des **connections possibles avec la partie « arithmétique » du programme**.

Des **liens vers des ressources** sont régulièrement proposés. Il s'agit dans certains cas d'**outils** permettant de se libérer de quelques phases de calcul dont la conduite et l'achèvement éloigneraient trop les élèves du problème traité. On doit pouvoir insister le temps qu'il faut sur certains points de calcul dont la maîtrise est un réel objectif de l'enseignement, quitte à s'en remettre à d'autres moments aux outils dont on dispose aujourd'hui pour pouvoir concentrer l'attention des élèves sur le problème à résoudre et les raisonnements nécessaires pour y parvenir.

Un document ressource présenté dans cet esprit

Ce document a été réalisé par un groupe d'inspecteurs et professeurs de l'académie de Versailles, dans le respect des instructions données par Madame Brigitte BAJOU, Doyenne du groupe de mathématiques de l'Inspection générale de l'éducation nationale, qui a en particulier veillé à l'exposition des sujets traités dans l'esprit « résolution de problèmes ».

Sommaire

Partie I

Quelques problèmes faisant apparaître des suites et des matrices

Dans cette partie, le vocabulaire spécifique aux matrices et les opérations sur les matrices ne sont pas supposés connus. Lorsque la nécessité s'en fait sentir, des matrices sont introduites, sur lesquelles on peut faire des opérations (le produit de Cayley notamment, qui est simplement celui que propose la calculatrice scientifique). La partie II proposera une étude plus systématique, mais la recommandation du programme est de commencer par des résolutions de problèmes et non par une introduction *ex nihilo* des matrices et encore moins de l'algèbre linéaire.

A. Un problème à deux compartiments

a. Le problème

On conserve dans une enceinte une population d'êtres unicellulaires qui peuvent se trouver dans deux états physiologiques désignés par A et B. On désigne par a_n et b_n les effectifs – exprimés en milliers d'individus − des deux populations à l'instant *n*. Des observations menées sur une assez longue période permettent d'estimer que :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,95a_n + 0,2b_n \\ b_{n+1} = 0,05a_n + 0,8b_n \end{cases} \quad (*)$$

(95% des unicellulaires se trouvant à l'instant *n* dans l'état A n'ont pas changé d'état à l'instant *n* + 1, non plus que 80% de ceux se trouvant à l'instant *n* dans l'état B). L'effectif total s'élève à 500 000 individus.

1. La population à l'instant 0 satisfait $a_0 = 375$. Faire le calcul des effectifs a_n et b_n pour $n \leqslant 50$. Peut-on faire une conjecture sur le comportement des suites (a_n) et (b_n) ?

2. Effectuer de nouveaux essais en prenant d'autres valeurs initiales (mais un effectif total identique).Quel est le comportement de la suite de terme général $\alpha_n = a_n - 400$? Conclure.

b. Commentaires sur le problème

Ce problème a été proposé dans le cadre d'une épreuve pratique de mathématiques. Les élèves utilisaient un tableur pour conjecturer la nature des suites (a_n) et (b_n). À l'étape 36, si on fait abstraction des erreurs de calcul dues au logiciel, le système est stable : il y a 400 000 êtres dans l'état A et 100 000 dans l'état B.

n	a indice n	b indice n
0	375	125
1	381,25	118,75
2	385,9375	114,0625
3	389,453125	110,546875
4	392,0898438	107,9101563
5	394,0673828	105,9326172
6	395,5505371	104,4494629
7	396,6629028	103,3370972
8	397,4971771	102,5028229
9	398,1228828	101,8771172
10	398,5921621	101,4078379
11	398,9441216	101,0558784
12	399,2080912	100,7919088
13	399,4060684	100,5939316
14	399,5545513	100,4454487
…	…	…
…	…	…
…	…	…
…	…	…
31	399,9966516	100,0033484
32	399,9974887	100,0025113
33	399,9981165	100,0018835
34	399,9985874	100,0014126
35	399,9989405	100,0010595
36	399,9992054	100,0007946

Pour répondre à la question suivante, il suffit de faire entrer dans les calculs le fait que la population totale est conservée, autrement dit que, pour tout *n* : $a_n + b_n = 500$.

Le système $\begin{cases} a_{n+1} = 0,95a_n + 0,2b_n \\ b_{n+1} = 0,05a_n + 0,8b_n \end{cases}$ a les mêmes solutions que $\begin{cases} a_{n+1} = 0,75a_n + 100 \\ b_n = 500 - a_n \end{cases}$, dont les solutions (ce sont des couples de suites) s'obtiennent explicitement en faisant apparaître la suite (géométrique) de terme général $\alpha_n = 400 - a_n$.

c. D'autres façons d'écrire le problème

On peut schématiser la relation $(*)$ par :

$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,2 \\ 0,05 & 0,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, donnant ainsi une signification au symbole $\times$ utilisé ici pour représenter l'action d'un tableau carré (une *matrice carrée d'ordre 2*) sur un couple de réels (un *vecteur-colonne*).

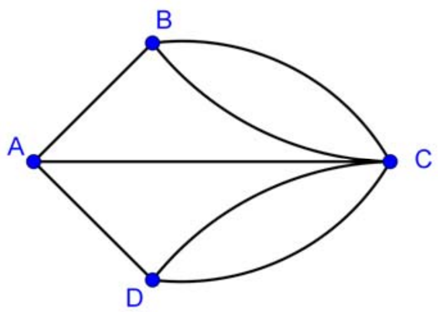
Le produit des matrices utilisable sur la calculatrice fonctionne comme cela, et on pourrait écrire que, pour tout entier naturel n non nul, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,2 \\ 0,05 & 0,8 \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$. Cette *puissance n-ième* de matrice peut-elle s'exprimer explicitement ?

Cette question n'est pas abordée ici. Notons que des simplifications sont certainement envisageables, comme le laissent penser les résultats obtenus sur la suite (α_n). Si on pose : $\beta_n = b_n - 100$, on obtient la relation :

$$\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = 0,75^n \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}.$$

B. Représentation d'un graphe. Notion de connexité

a. Parcourir un graphe



Les ponts de Koenigsberg

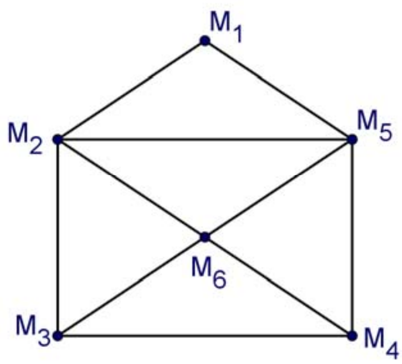
Chacun connaît l'histoire du parcours impossible empruntant une et une seule fois les sept ponts de la ville de Koenigsberg (aujourd'hui Kaliningrad), ponts reliant les rives du fleuve qui traverse la ville, la Pregel, aux deux îles que celle-ci forme, et les deux îles entre elles.

On dit que Léonard Euler (1707 – 1783) résolut le problème. Il est certain que l'expérience de l'humanité l'avait résolu en pratique avant lui, mais le génie d'Euler fut de fabriquer des mathématiques avec cela, c'est-à-dire de donner des définitions donnant naissance à des théorèmes.

Le problème des ponts de Koenigsberg consiste à savoir si un certain *graphe* est *eulérien* (on peut en parcourir toutes les arêtes sans passer deux fois sur la même). On pourrait aussi se demander si un graphe est *hamiltonien* (il existe un parcours passant par tous les sommets) et, pour commencer, si un graphe est *connexe*. Voici quelques définitions :

Un graphe (non orienté) à n sommets est une suite finie de points distincts $(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \dots, \mathrm{M}_n)$, appelés **sommets,** et d'**arêtes**, dont les extrémités sont des sommets. On considérera**,** ici, qu'il n'existe pas de **boucle**, c'est-à-dire d'arête ayant pour extrémités le même sommet, et qu'il n'existe pas non plus de point **isolé**, c'est-à-dire relié à personne. Le nombre d'arêtes dont une extrémité est un sommet donné est appelé **degré** de ce sommet. Dans l'exemple des ponts de Koenigsberg le sommet A est de degré 3.

Une **chaîne** de longueur $p \geqslant 2$ reliant M_i à M_j est une suite de sommets $(S_1, S_2, \dots, S_p, S_{p+1})$ telle que $S_1 = \mathrm{M}_i$, $S_{p+1} = \mathrm{M}_j$, et que, pour tout k compris entre 1 et p, il existe une arête reliant S_k à S_{k+1}. Dans le graphe ci-contre, $(\mathrm{M}_5, \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2)$ est une chaîne de longueur 2 reliant M_5 à M_2, $(\mathrm{M}_5, \mathrm{M}_4, \mathrm{M}_6, \mathrm{M}_2)$ en est une de longueur 3, $(\mathrm{M}_5, \mathrm{M}_6, \mathrm{M}_4, \mathrm{M}_3, \mathrm{M}_2)$ une de longueur 4, etc. Dans le graphe associé au problème des Ponts de Koenigsberg, il n'existe pas de chaîne de longueur 1 reliant B à D. Il n'existe pas de chaîne de longueur 1 reliant M_5 à lui-même, mais il en existe une de longueur 2 : $(\mathrm{M}_5, \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_5)$. D'ailleurs, quand le graphe ne contient pas de point isolé (ce qui est une hypothèse de travail), il existe toujours une chaîne reliant un point et son double.



Peut-on repasser toutes les arêtes de l'« enveloppe » sans lever le crayon ?

Un graphe est **connexe** quand, deux points quelconques étant donnés, il existe une chaîne qui les relie.

b. Matrice d'adjacence d'un graphe

On peut représenter le graphe précédent dans un tableau dans lequel, à l'intersection de la ligne *i* et de la colonne *j*, on écrit 0 si aucune arête ne relie M_i et M_j, et 1 si une arête les relie (dans le cas du graphe associé au problème des ponts de Koenigsberg, il arrive que deux arêtes relient les deux mêmes sommets. Ce n'est évidemment pas un handicap pour l'étude de la connexité, mais cela oblige à modifier les écritures si on cherche une chaîne eulérienne).

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
M_1	0	1	0	0	1	0
M_2	1	0	1	0	1	1
M_3	0	1	0	1	0	1
M_4	0	0	1	0	1	1
M_5	1	1	0	1	0	1
M_6	0	1	1	1	1	0

Le réel qui figure dans la ligne *i* et la colonne *j* de ce tableau est noté α_{ij}. Il représente le nombre de chaînes de longueur 1 joignant M_i et M_j. Notons que nécessairement $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ Pour toute chaîne de longueur 2 joignant M_i et M_j, il existe *k* tel que cette chaîne soit (M_i, M_k, M_j). Le nombre $\beta_{ij} = \sum_{k=1}^{k=6} \alpha_{ik}\alpha_{kj}$, somme des produits terme à terme des éléments d'une ligne par ceux d'une colonne, est la somme de six termes dont chacun est le produit de deux nombres choisis parmi 0 et 1 ; à chacun des termes non nuls de cette somme est associé une chaîne de longueur 2 joignant M_i et M_j et un seul. Leur somme est donc le nombre de chaînes de longueur 2 joignant M_i et M_j, et c'est β_{ij}. On retrouve le produit matriciel des calculatrices, qui était apparu dans le problème précédent. La matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donne, à l'intersection de la ligne *i* et de la colonne *j*, le nombre de chaînes de longueur 2 joignant M_i et M_j. Les puissances successives de la matrice d'adjacence du graphe donnent les nombres de chaînes de longueur *n* allant d'un sommet du graphe à un autre. Cette dernière affirmation nécessite une démonstration (par récurrence).

c. Lire sur sa matrice la connexité d'un graphe

Le calcul précédent a pour résultat une matrice dont aucun coefficient n'est nul : chaque fois qu'on se donne deux sommets, il existe une chaîne de longueur 2 qui les relie. Le graphe de l' « enveloppe » est connexe. Cela pouvait se voir, bien sûr, mais il faut imaginer des graphes possédant un grand nombre de sommets. Ce qui précède montre surtout qu'**un graphe peut être donné par sa matrice**.

En consultant les puissances successives de la matrice d'adjacence, on peut savoir s'il y a des chaînes de longueur 2, 3, … reliant tel sommet à tel autre. Jusqu'où calculer ? Considérons un graphe à n sommets ($n \geqslant 2$). Si une chaîne de longueur n ne passe pas par tous les sommets du graphe, alors elle passe au moins deux fois par le même et on peut réduire la « boucle » qu'elle formait. Cet argument montre qu'il suffit de pousser la recherche jusqu'à la puissance *n*-ième.

D'où le résultat : un graphe associé à une matrice d'adjacence A d'ordre *n* est connexe si et seulement si, pour tout couple (i, j) d'entiers compris entre 1 et *n*, il existe un entier *p* compris entre 1 et *n* tel que le coefficient de la ligne *i* et de la colonne *j* de la matrice A^p soit non nul.

C. Étude, gestion et prévision économiques

a. Des tableaux de nombres pour la gestion

Voici les productions (en milliers) de deux usines de cycles appartenant à une même enseigne pour le premier semestre de l'année 2010 :

Premier semestre 2010					
Article	VTT adultes	Vélos enfants	VTC	BMX	Vélos de course
Usine 1	12,99	13,20	5,58	1,53	1,95
Usine 2	4,62	4,98	2,16	0,51	0,78

Si on veut faire entrer les données de ce tableau dans un enchaînement de calcul, on les regroupe dans le tableau de nombres suivant :

$$A=\begin{pmatrix} 12{,}99 & 13{,}20 & 5{,}58 & 1{,}53 & 1{,}95 \\ 4{,}62 & 4{,}98 & 2{,}16 & 0{,}51 & 0{,}78 \end{pmatrix}$$, appelés **matrice**.

Cette matrice a 2 lignes et 5 colonnes. On dit que cette matrice est de taille 2 × 5. Elle contient 10 éléments, appelés « **coefficients de la matrice** ». Pour repérer un coefficient d'une matrice, on indique son indice de ligne puis son indice de colonne, les lignes se comptant du haut vers le bas et les colonnes de la gauche vers la droite.

La disposition générale des coefficients de la matrice A est donc la suivante :

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{pmatrix}$. a_{23} désigne le terme de la 3ème ligne et de la 2ème colonne. $a_{23} = 2{,}16$.

La production de l'usine 1 pour le premier semestre 2011 peut être représentée par la matrice : $\begin{pmatrix} 12{,}99 & 13{,}20 & 5{,}58 & 1{,}53 & 1{,}95 \end{pmatrix}$ appelée« **matrice ligne de taille 5 ».** La production des VTT adultes dans les deux usines est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} 12{,}99 \\ 4{,}62 \end{pmatrix}$, appelée **« matrice colonne de taille 2 ».**

Les productions (en milliers) des deux usines de cycles pour le second semestre de l'année 2010 sont les suivantes :

Second semestre 2010					
Article	VTT adultes	Vélos enfants	VTC	BMX	Vélos de course
Usine 1	11,79	15,84	4,38	1,29	1,59
Usine 2	3,78	4,14	2,40	0,51	0,66

Ces données sont représentées par la matrice $B=\begin{pmatrix}11,79 & 15,84 & 4,38 & 1,29 & 1,59\\ 3,78 & 4,14 & 2,40 & 0,57 & 0,66\end{pmatrix}$.

La matrice C représentant la production annuelle pour ces deux usines est obtenue en ajoutant termes à termes les coefficients des deux matrices A et B. La matrice C est, par définition, la somme des matrices A et B.

On note : $C=A+B$. Si l'on appelle $c_{i\,j}$ l'élément de la *i*-ième ligne et *j*-ième colonne, on a, pour tout *i* égal à 1 ou 2 et *j* compris entre 1 et 5 : $c_{i\,j}=a_{i\,j}+b_{i\,j}$. $C=\begin{pmatrix}24,78 & 29,04 & 9,96 & 2,82 & 3,54\\ 8,40 & 9,12 & 4,56 & 1,08 & 1,44\end{pmatrix}$.

On a alors pour tout *i* égal à 1 ou 2 et *j* compris entre 1 et 5 : $b_{i\,j}=c_{i\,j}-b_{i\,j}$.

Par définition, la matrice B est la différence des matrices A et C : $B=C-A$.

Ces opérations sont réalisables sur des matrices de même taille.

La matrice D qui représente la production moyenne par mois dans ces deux usines est obtenue en divisant chacun des coefficients $c_{i\,j}$ par 12. Ainsi $D=\begin{pmatrix}2,065 & 2,42 & 0,83 & 0,235 & 0,295\\ 0,7 & 0,76 & 0,38 & 0,09 & 0,12\end{pmatrix}$. On note $D=\frac{1}{12}C$.

b. Élaboration d'un indice de prix

Une association de consommateurs compare les prix de trois magasins. Elle imagine alors une famille achetant une certaine quantité de cinq produits et utilise le procédé suivant :
La matrice de taille 5×3 ci-contre indique les prix des cinq produits dans les trois magasins. On fait opérer cette matrice sur le « panier de la ménagère » représenté par le vecteur colonne de droite en multipliant chaque terme de chaque ligne par le terme de même rang du vecteur, et en faisant la somme des résultats obtenus. Les prix des trois paniers sont lus dans le vecteur colonne de gauche.

$$\begin{pmatrix}30\\29,2\\30,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5 & 2 & 3 & 4\\ 1,1 & 4,7 & 1,8 & 3,1 & 3,8\\ 0,9 & 5,1 & 1,9 & 3,2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\3\\3\\2\end{pmatrix}$$

Les prix à l'unité d'un même article sont indiqués dans la même colonne. Le vecteur colonne mentionne les quantités souhaitées

Un *vecteur colonne* est une matrice à une seule colonne. Un *vecteur ligne* est une matrice à une seule ligne. Pour le calcul automatique, on peut les considérer comme tels, et les appeler *matrice colonne* ou *matrice ligne*.

Dans l'exemple précédent, on peut rassembler les prix moyens pratiqués sur chaque article dans les trois magasins, en faisant agir la matrice des prix sur le vecteur ligne $\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

En effet :

$$\begin{pmatrix}\frac{1+1,1+0,9}{3} & \frac{5+4,7+5,1}{3} & \frac{2+1,8+1,9}{3} & \frac{3+3,1+3,2}{3} & \frac{4+3,8+4}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 5 & 2 & 3 & 4\\ 1,1 & 4,7 & 1,8 & 3,1 & 3,8\\ 0,9 & 5,1 & 1,9 & 3,2 & 4\end{pmatrix}$$

c. Gestion des admissions et sorties dans un hôpital

En simplifiant, on estime que les patients admis dans un certain service d'un hôpital peuvent se trouver dans l'un des 4 états suivants : 1. Soins réguliers, 2. Chirurgie, 3. Soins intensifs, 4. Congé. La matrice suivante indique les probabilités (obtenues par modélisation des fréquences observées sur une longue période) de passage d'un des états à un autre dans un intervalle de 24 heures.

Tableau de circulation des malades entre les services :

	1. Soins réguliers	2. Chirurgie	3. Soins intensifs	4. Congé
1. Soins réguliers	0,6	0,2	0	0,2
2. Chirurgie	0,1	0	0,8	0,1
3. Soins intensifs	0,5	0	0,33	0,17
4. Congé	0	0	0	0

Cette matrice s'utilise de la façon suivante : si, un certain jour, la distribution des patients suivant les quatre états possibles s'écrit $X=(12;5;6;3)$, le lendemain, cette distribution s'écrit $X'=(10,7;\ 2,4;6;3,9)$.

Ce résultat (dans lequel on ne doit pas se formaliser de trouver des dixièmes d'êtres humains) peut être obtenu par un calcul direct (les 12 personnes en soins réguliers se partagent selon les proportions indiquées, les 5 personnes en chirurgie passent en soins réguliers, etc.) ou par le calcul mis en forme de l'action de la matrice *M* sur le *vecteur ligne X*.

$$X'=XA$$

Supposons qu'au jour 0, 10 patients soient admis en soins réguliers et qu'il n'y ait aucun patient en cours de traitement. Supposons également que 10 patients soient admis chaque jour. Le processus se déroule de la manière suivante :

$X_1=(10,0,0,0)M+(10,0,0,0)$

$X_2=X_1M+(10,0,0,0)=X_0M^2+X_0M+X_0$ Les calculs confiés à un tableur montrent que la situation tend à se stabiliser.

Jour	soins réguliers	chirurgie	soins intensifs	congé
	10	0	0	0
1	16	2	0	2
2	19,8	3,2	1,6	3,4
3	23	3,96	3,093333333	4,546666667
4	25,74266667	4,6	4,199111111	5,511555556
5	28,00515556	5,148533333	5,079703704	6,308385185
6	29,85779852	5,601031111	5,812061235	6,962501728
7	31,38081284	5,971559704	6,418178634	7,500339687
8	32,63473299	6,276162568	6,916640641	7,943014977
9	33,66677637	6,526946598	7,326476935	8,307336295
10	34,51599895	6,733355274	7,663716257	8,607129423
	…	…	…	…

Jour	soins réguliers	chirurgie	soins intensifs	congé
	…	…	…	…
	…	…	…	…
19	37,77891633	7,526399099	8,959652443	9,759018149
20	37,89981593	7,555783266	9,007670094	9,801698583
21	37,99930293	7,579963186	9,047183311	9,836819862
22	38,08116973	7,599860586	9,079698319	9,86572079
23	38,14853706	7,616233947	9,106454575	9,889503058
24	38,20397292	7,629707412	9,128472016	9,909073236
25	38,2495905	7,640794583	9,146589935	9,925177327
26	38,28712873	7,6499181	9,161498978	9,938429214
27	38,31801853	7,657425745	9,173767473	9,949334051
28	38,34343743	7,663603707	9,183863087	9,958307527

On pourrait continuer le calcul littéral précédent, pour aboutir à :

Pour tout n entier supérieur ou égal à 2, $X_n=X_0\left(M^{n-1}+M^{n-2}+\ldots+M^2+M+I\right)$, où I désigne la matrice identité d'ordre 4 (ses coefficients sont 0 sauf sur la diagonale principale où ils sont tous égaux à 1).

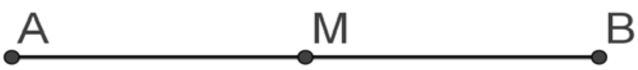
… après, il faudrait savoir comment trouver la limite (si on peut donner un sens à ce mot, et s'il y a une limite) de cette somme.

On voit qu'en ajoutant un peu de sophistication, ce modèle peut effectivement être utilisé en gestion.

D. Marches aléatoires

Dans cette partie, on s'intéresse au comportement à long terme d'une marche aléatoire. Il s'agit de calculer les probabilités pour le héros d'une marche aléatoire dans un réseau de se trouver après *n* pas en tel ou tel sommet (ou nœud) du réseau.

a. Marche aléatoire sur un segment



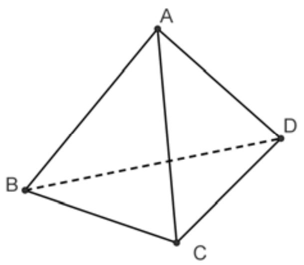
Le personnage se déplace d'un sommet à l'autre du graphe ci-contre. S'il est en A ou en B, il ne peut aller qu'en M, s'il est en M, il peut aller en A ou en B avec des probabilités que nous considérons comme identiques.
On représente la situation par une matrice qui indique non les arêtes existantes comme les matrices d'adjacence, mais les probabilités de passage d'un sommet à un autre. À la différence des matrices d'adjacence, les *matrices de transition* ne sont pas systématiquement symétriques. La matrice ci-contre représente la marche dans le réseau (A, M, B).

$$\begin{array}{c} \\ A \\ M \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & M & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Les coefficients figurant sur chaque ligne donnent les probabilités de passage du sommet qui donne son nom à la ligne à celui qui donne son nom à la colonne. La diagonale ne contient de ce fait que des 0.

Dans le produit de la matrice de transition par elle-même, on calcule par exemple la somme des produits terme à terme de la première ligne par la première colonne : pour aller de A à A en deux pas, le personnage va de A à A puis de A à A (les probabilités sont 0 et 0), ou de A à M puis de M à A (probabilités 1 et ½), ou de A à B puis de B à A (probabilités 0 et 0). Les coefficients qui y figurent sont les probabilités pour que le personnage situé au sommet qui donne son nom à la colonne se soit trouvé deux coups auparavant au sommet qui donne son nom à la ligne. Le carré de la matrice est $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, et son cube est elle-même $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On peut interpréter ces résultats : par exemple, partant de A, le personnage est sûrement en M après un nombre impair de pas, en B ou en A avec des probabilités $\frac{1}{2}$ après un nombre pair de pas.

b. Marche aléatoire aux sommets d'un tétraèdre



À la différence de la situation précédente, dans la marche aux sommets d'un triangle comme dans la marche aux sommets d'un tétraèdre, on peut passer, à chaque étape, de tout sommet donné à tout autre sommet donné

Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, la matrice de transition s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

On peut démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la puissance n-ième de la matrice M s'écrit :

$$M^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & v_n & v_n \end{pmatrix}$$

,

où les termes généraux des suites (u_n) et (v_n) sont : $u_n = \frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$ et $v_n = \frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}\right)$.

La lecture de ces matrices de transition est naturellement la même qu'au paragraphe précédent : le coefficient $m_{i\,j}^{(n)}$ donne la probabilité qu'une chaîne de longueur n permette de passer du sommet i au sommet j. Il n'y a pas d'ambiguïté dans ce cas, la matrice est symétrique (les puissances d'une matrice symétrique sont symétriques).
Les différences s'estompent rapidement : s'il n'est pas possible de passer d'un sommet à lui-même en un pas, les probabilités d'aller d'un sommet quelconque à un sommet quelconque sont très voisines dès que n est grand. La limite commune des deux suites (u_n) et (v_n) est $\frac{1}{4}$.

c. *Shall I return ?*

Ayant quitté un sommet du tétraèdre, au bout de combien de pas aléatoires le personnage peut-il compter y revenir ? Soit X la variable aléatoire donnant, pour chaque marche, ce nombre de pas. On a :

$P(X=1)=0,\ P(X=2)=\frac{1}{3},\ P(X=3)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$

En effet, pour que le personnage soit en A, par exemple, après n pas sans y avoir été dans aucune de ses positions précédentes, il est nécessaire qu'à chacun de ses déplacements précédents il soit passé d'un sommet qui n'était pas A à un autre qui n'était pas A non plus, choisissant dont l'un de deux sommets sur trois possibles. On peut vérifier par récurrence que $P(X=n)=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\times\frac{1}{3}$, pour tout n supérieur ou égal à 2 (on peut vérifier que la limite de la somme de ces probabilités est 1).

La variable X suit donc une loi hypergéométrique.

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/marche/marche1.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/marche/marche2.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/marche/marche3.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/marche/marche4.jsp

E. Pertinence d'une page web

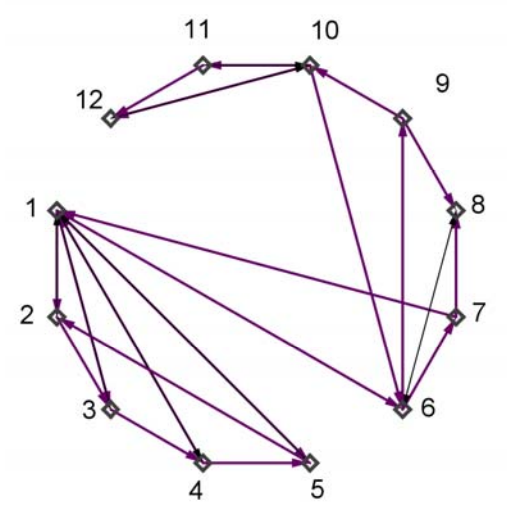
a. De la recherche dans une bibliothèque à la recherche dans un graphe

Un moteur de recherche doit fournir à ses utilisateurs une liste de pages où apparaissent des mots-clés donnés par celui-ci. On peut avoir l'idée de classer les milliards de pages disponibles dans un ordre permettant le tri à partir des mots-clés fournis. Cela demande des moyens de stockage considérables et la réorganisation continuelle (en temps réel, comme on dit) de ces archives. Il faut assurer aux milliers de requêtes simultanées des réponses rapides, mais aussi des réponses fiables.

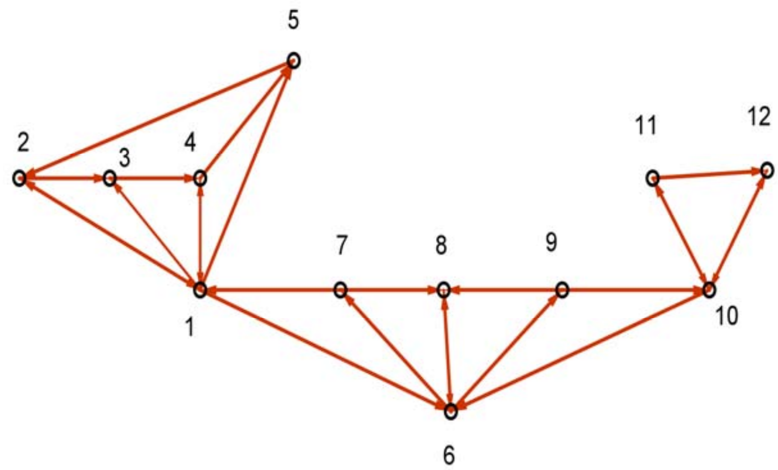
L'ordre alphabétique n'est probablement pas le meilleur pour assurer un service rapide et de qualité : les pages référencées pour le client doivent donner une idée aussi juste que possible de l'information disponible au moment de la requête, et faire apparaître en premières citations celles qui y répondent le mieux, les plus *pertinentes*.

Mais le web n'est pas une bibliothèque. Les pages web comportent des *liens* qui permettent d'accéder directement de l'une à d'autres. On peut donc considérer le web comme un graphe, et s'appuyer sur l'existence de ces liens pour construire les algorithmes de recherche à partir de mots-clés.

b. Des organisations apparentes dans un graphe



Le graphe de gauche, qui ne comporte pourtant que 12 sommets, n'est pas très lisible. Les sommets les plus « fréquentés » n'y sont pas facilement identifiables.



Une nouvelle représentation de ce graphe, plus « buissonnante » à défaut d'être arborescente, met mieux en évidence l'importance des sommets 1, 6 et 10, vers lesquels « pointent » un nombre élevé d'autres sommets.

c. Un modèle de pertinence

On part du principe que plus une page est pertinente, plus il y a de pages qui pointent vers elle. Sa pertinence est renforcée par la pertinence des pages qui pointent vers elle, elle est diminuée par la dispersion éventuelle des liens issus de ces dernières. Appelons μ_i le nombre qui mesure la pertinence de la page i. En appliquant un modèle grossier de proportionnalité à la pertinence des pages j qui pointent vers la page i et d'inverse proportionnalité au nombre de liens ℓ_j issus de chacune de ces pages, on peut écrire :

$$\mu_i = \sum_{j \to i} \frac{1}{\ell_j} \mu_j . \qquad (*)$$

Si on essaie de faire le calcul avec le graphe précédent, on butte sur le fait que la pertinence d'une page est définie par celle d'autres pages. Par exemple, $\mu_7 = \frac{1}{3}\mu_6$, $\mu_{12} = \mu_{11} + \frac{1}{2}\mu_{10}$, etc. On pourrait essayer d'écrire un système linéaire, mais certaines pages ne pointent vers aucune autre, bien que d'autres pointent vers elles. On réécrit la formule (*) avec des coefficients notés $a_{i\,j}$, le coefficient $a_{i\,j}$ valant $\frac{1}{\ell_j}$ si la page j pointe vers la page i, 0 sinon :

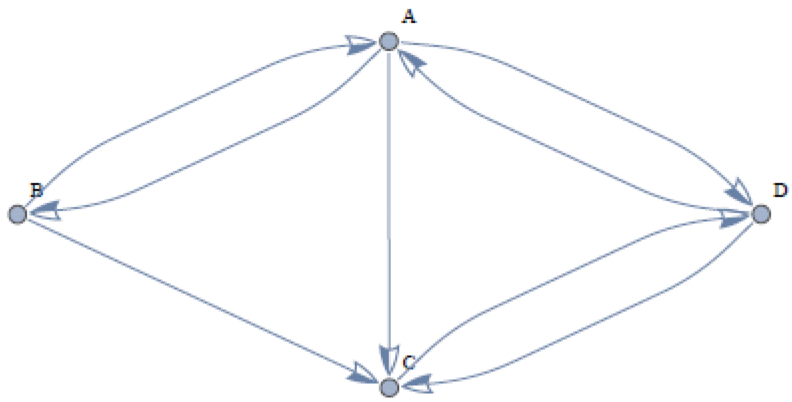
$$\mu_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} \mu_j \text{ , si le graphe a } n \text{sommets.}$$

Sous cette forme, on reconnaît un système linéaire dont les inconnues sont les pertinences des n pages. « Il n'y a plus qu'à » résoudre ce système. Nous verrons des méthodes pour cela, sauf que dans le cas du web il y a des milliards d'inconnues.

d. Pertinence et probabilités

La formule ci-dessus peut être traduite d'une autre manière : on interprète les coefficients a_{ij} du système précédent comme la probabilité, pour un « surfeur » qui se trouverait à la page j de suivre le lien qui l'amènera à la page i. Cette probabilité est définie de la manière suivante : si p liens sont issus de la page j, la probabilité pour que le surfeur du web passe de la page j à une des pages vers lesquelles elle pointe est $\frac{1}{p}$, la probabilité pour qu'il se dirige vers une autre est 0.

Dans l'exemple ci-dessous, le graphe représente les liens existant entre quatre pages web :



Les pages étant classées dans l'ordre alphabétique, la matrice de transition associée à ce graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Il peut arriver que certaines pages ne comportent aucun lien. Lorsqu'on arrive sur l'une d'entre elles, il est impossible de la quitter. La ligne de la matrice correspondant à cette page ne comporte que des 0. Pour éviter ce problème, on remplace ces pages isolées par des pages comportant un lien vers chacune des autres. Ainsi, en arrivant sur une d'entre elles, on peut la quitter en choisissant aléatoirement l'une des autres pages associées au graphe.

La navigation sur un ensemble de pages peut être modélisée ainsi, en considérant que les internautes sont uniformément répartis sur l'ensemble des pages et en itérant le processus jusqu'à ce que la répartition atteigne un état stable.

Dans l'exemple précédent, on peut montrer que les puissances de la matrice M ont pour limite la matrice L ci-contre. En conséquence, on attribue aux pages A, B, C et D les indices de pertinence respectifs $\frac{3}{13}, \frac{1}{13}, \frac{4}{13}$ et $\frac{5}{13}$.

$$L = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{4}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{4}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{4}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{4}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

e. Facteur d'amortissement

Le modèle précédent présente quelques inconvénients :

- Si le graphe n'est pas connexe, alors la distribution de probabilité de l'état initial conduit à un état stable dans lequel certaines composantes connexes ne sont pas explorées ;
- Dans le cas de graphes orientés (ce qui est généralement le cas pour des liens entre pages), tout sommet d'un sous-graphe duquel on peut sortir sans pouvoir y revenir a une probabilité nulle.

Ces problèmes sont résolus en introduisant un *facteur d'amortissement*, c'est-à-dire en remplaçant la matrice M par la matrice $N = dM + \frac{1-d}{n}U$, où d est un réel strictement compris entre 0 et 1 et U la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1. On modélise de cette façon la possibilité de partir d'une page choisie au hasard sans passer par un lien.

Par exemple, la matrice M ci-dessus est remplacée, en prenant $d = \frac{4}{5}$, par $N = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{19}{60} & \frac{19}{60} & \frac{19}{60} \\ \frac{9}{20} & \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{17}{20} \\ \frac{9}{20} & \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} \end{pmatrix}$

On démontre que les puissances de la matrice N conduisent à une matrice limite et à des indices qui sont $\frac{135}{572}$, $\frac{323}{2860}$, $\frac{171}{572}$ et $\frac{1007}{2860}$, à comparer aux indices sans amortissement trouvés précédemment :

Page	A	B	C	D
Sans amortissement	0,23	0,08	0,31	0,38
Avec amortissement	0,24	0,11	0,3	0,35

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/pertinence/pertinence.jsp

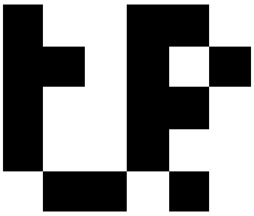
F. Traitement de l'image

a. Numériser des images… imager les nombres

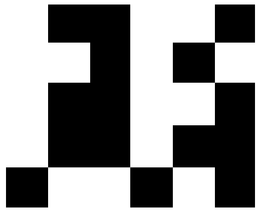
On a extrait l'image ci-contre d'une photographie d'Alan Turing disputant une course de 3 miles en 1946. Cette photographie a été reproduite sur un site web consacré à l'un des « inventeurs » de l'informatique. Elle a donc été « numérisée », c'est-à-dire transformée en une suite de 0 et de 1. Le rectangle est décomposé en un certain nombre de petits carrés, et à chacun de ces carrés a été attribué un nombre qui représente une nuance de gris. La finesse de la décomposition (le nombre de carrés) est la *définition* de l'image. La définition de cette image particulière n'est pas bonne : on devine les *pixels* (mot fabriqué avec les débuts des mots anglais *picture element*).

Toute image n'utilisant que le noir et le blanc peut donc être représentée par un tableau contenant autant de cases que l'image contient de pixels, chacune de ces cases étant occupée par 0 ou 1. L'image est donc représentée par une matrice dans tous les éléments sont 0 ou 1. Réciproquement, si on peut dire, les codes QR (initiales de *quick response*) sont des images susceptibles d'être interprétées comme des matrices et pouvant contenir jusqu'à 7089 caractères numériques ou 4296 caractères alphanumériques (alors que les codes barres ne peuvent représenter qu'une douzaine de caractères).

b. Opérations sur les images



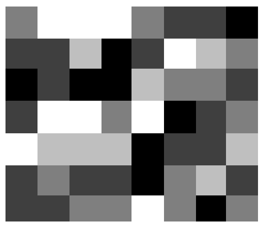
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

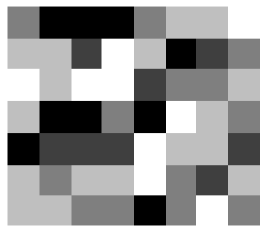


On transforme la matrice A associée à l'image de gauche en remplaçant 1 par 0 et 0 par 1, on obtient la matrice B, associée à l'image de droite, qui est le négatif de l'image de gauche.

On peut également coder des images en nuances de gris en attribuant à chaque pixel un nombre compris entre 0 et 1, proche de 1 si la case est gris foncé, proche de 0 si elle est gris clair. On peut également définir l'image négatif de l'image de départ en lui associant la matrice dont les éléments sont les compléments à 1 des éléments de la matrice de départ.

Les deux images ci-contre sont le négatif l'une de l'autre. D'autres critères peuvent être enregistrés dans les éléments de la matrice associée à une image, la luminosité par exemple. Une multiplication de tous les éléments de la matrice représentant la luminosité par un même facteur modifie la luminosité de l'ensemble.



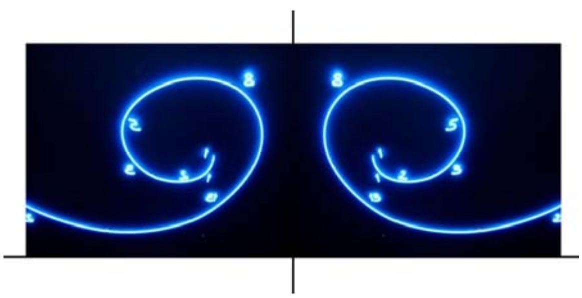


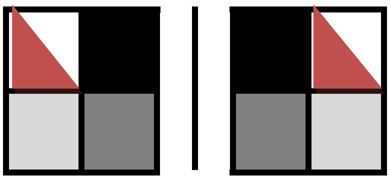
Si deux images ont le même format et la même définition, il est possible de leur faire correspondre leur *somme*, associée à la somme des matrices qui les définissent, en convenant qu'un coefficient supérieur à 1 donne un pixel de couleur noire. On peut aussi leur faire correspondre leur *différence*, avec cette fois la convention que tout pixel associé à un nombre négatif est blanc.

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/image/image1.jsp,
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/image/image2.jsp,
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/image/image3.jsp,
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/image/image4.jsp,
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/image/image5.jsp,
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/image/image6.jsp,
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/image/image7.jsp.

c. Comment modifier la forme d'une image ?

On se propose de transformer l'image de droite en sa symétrique par rapport à l'axe vertical, l'image de gauche. Pour cela, il suffit de représenter le symétrique de tout pixel de l'image de droite. Chaque pixel étant d'une seule couleur, l'image obtenue est bien la symétrique de l'image de départ. Ce ne serait pas le cas si on transportait des petits carrés non uniformément colorés pour reconstituer une image.





En effet, le déplacement et la reconstitution d'une image élément par élément ne donne pas nécessairement une image symétrique, comme le montre l'image ci-contre, dans laquelle on a procédé carré par carré. Il ne faudrait pas croire que, dans une symétrie, les pixels sont eux aussi « retournés ». C'est le centre du pixel – un point, au sens mathématique du terme – qui est transporté, et le pixel est reconstitué autour.

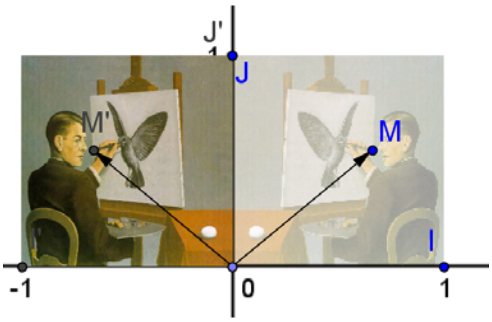
d. Des matrices pour réaliser des transformations

À tout point du plan, de coordonnées $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ données dans un repère (que nous choisirons orthonormal pour que l'action sur les figures soit mieux visible), on peut associer un autre point, de coordonnées $\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}$ définies par l'action d'une matrice carrée $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ce qui s'écrit : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ou encore $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$.

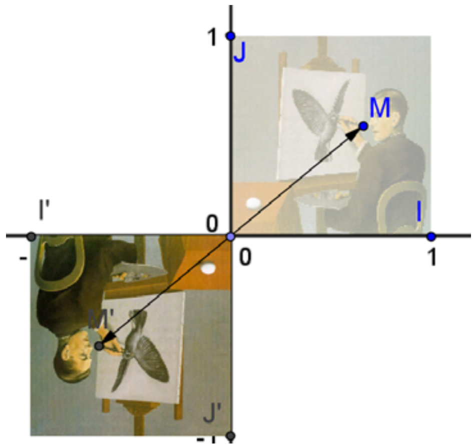
Si, par exemple, $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$ et $d = 0$, les coordonnées x et y d'un point quelconque sont transformées en $-x$ et y, qui sont les coordonnées de son symétrique par rapport à l'axe vertical.

Le tableau suivant fournit, sur l'image d'une œuvre de René Magritte, des exemples d'actions d'une matrice sur une image. **Exercice :** Trouver les coefficients correspondants.

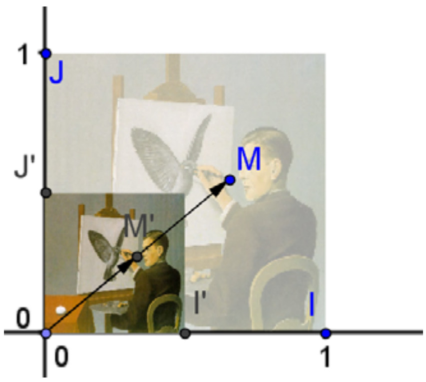
Réflexion d'axe (O*y*)



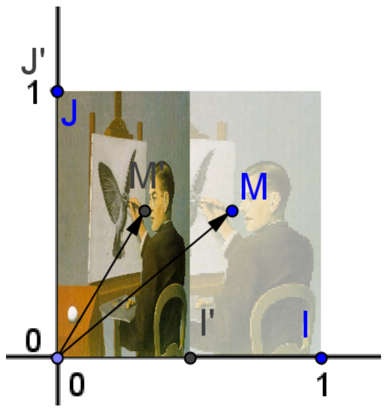
Symétrie centrale



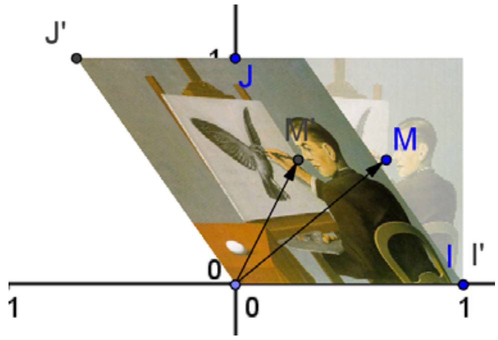
Réduction (multiplication des dimensions par 0,5)



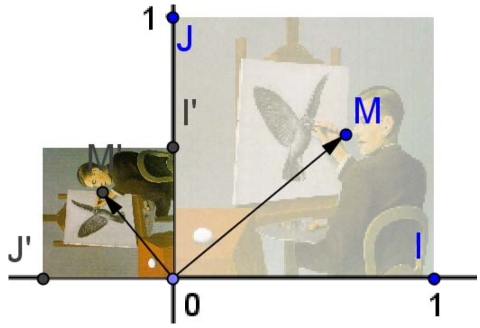
Affinité orthogonale de base l'axe (O*y*) de rapport 0,5



Transvection



Similitude



Retrouver un programme Scilab de ION

Partie II

Définitions et premiers calculs avec des matrices

Dans cette partie, le vocabulaire spécifique aux matrices et les opérations sur les matrices sont introduits. La présentation de quelques résultats peut aider à la compréhension ou à la formalisation des exemples abordés dans la partie I, mais le programme marque le souhait de voir les lycéens travailler à la résolution de problèmes **avant** tout exposé sur les matrices. Ces résultats seront mis ensuite en œuvre. On s'autorisera, en revanche, dans la partie III, la référence directe à quelques résultats théoriques.

A. Matrices. Action sur les vecteurs.

a. Quelques définitions, quelques notations

Deux entiers naturels *m* et *n* étant donnés non nuls, on appelle matrice de taille $m \times n$ tout tableau rectangulaire de $m \times n$ éléments, disposés sur *m* lignes et *n* colonnes. Dans les situations abordées ici, les éléments en question sont des nombres réels.

La matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \dots & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ peut aussi être notée $A = \left[a_{i\,j} \right]$, la notation $a_{i\,j}$ désigne le terme (l'élément, le coefficient) situé à l'intersection de la *i*-ième ligne et de la *j*-ième colonne. C'est le *terme général* de la matrice A.

Lorsque $m = n$ on dit que la matrice est *carrée* (carrée d'ordre n si nécessaire). Les éléments $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{n-1,n-1}, a_{nn}$ sont les éléments de la *diagonale principale* de la matrice. La *matrice identité d'ordre* n est la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de ceux situés sur la diagonale principale qui sont égaux à 1. Elle est souvent notée I_n.

L'égalité ne peut intervenir qu'entre deux matrices A et B de même taille : elle signifie que, pour tout indice *i* et pour tout indice *j*, $a_{i\,j} = b_{i\,j}$. Une matrice dont tout les coefficients sont nuls est dite *matrice nulle* (mais deux matrices nulles qui n'ont pas la même taille ne sont pas égales).

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/coefficient1.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/baseeuler/recherche_fiche.jsp?theme=4

b. Addition, produit par un scalaire

On peut faire la somme de deux tableaux de nombres ayant même nombre de lignes et de colonnes en procédant par addition place par place. C'est ce procédé qui est retenu pour définir l'addition de matrices de même taille. Dire que les matrices A, B et C, de taille $m \times n$, sont telles que $C = A + B$, c'est dire que :

Pour tout *i* compris entre 1 et m, pour tout *j* compris entre 1 et n, $c_{i\,j} = a_{i\,j} + b_{i\,j}$.

On peut de même multiplier tous les éléments d'un tableau de nombres par un même nombre (pour appliquer une taxe, par exemple). C'est ce procédé qui est utilisé pour multiplier une matrice A par un *scalaire* λ (un nombre réel). On note λA la matrice obtenue. On a donc $\lambda A = \left[\lambda a_{i\,j} \right]$.

On pourra dans ce sens parler de *matrices proportionnelles*.

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/somme1.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/produit4.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/pdf/somme1.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/somme2.jsp

c. Action sur un vecteur colonne ou sur un vecteur ligne

Une matrice de taille $m\times n$ agit sur un vecteur colonne (ou une matrice colonne) de taille $n\times 1$ par le produit rencontré en I.C., qui s'apparente à la réalisation de m produits scalaires de vecteurs en dimension n. Le vecteur objet est écrit à droite de la matrice. Le résultat est un vecteur colonne de taille $m\times 1$.

On peut également être amené à considérer l'action d'une matrice de taille $m\times n$ sur un vecteur ligne (une matrice ligne) de taille $1\times m$ écrit à sa gauche. Le résultat est un vecteur ligne de taille $1\times n$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 14 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

c. Produit de matrices

Ce sont les méthodes de calcul du paragraphe précédent qui fondent la définition du *produit de Cayley* (1858) des matrices : « le produit AB de la matrice B par la matrice A est la matrice dont les vecteurs lignes sont les résultats de l'action de A sur les vecteurs colonnes de B ». Cette définition suppose naturellement que les tailles des matrices soient compatibles.

Soit A une matrice de taille $m\times n$ et B une matrice de taille $n\times p$. Le produit de A par B est la matrice, notée AB, dont, pour tout i compris entre 1 et m et pour tout j compris entre 1 et p, l'élément $c_{i\,j}$ est la somme des produits terme à terme des éléments de la i-ième ligne de A par les éléments de la j-ième colonne de B.

$$c_{i\,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} b_{k\,j}\ .$$

Remarque : cette définition manifeste son utilité – et sa compatibilité avec la façon dont a été défini le produit d'un vecteur colonne par une matrice – lorsqu'il s'agit de faire subir deux opérations successives, représentées par deux matrices, à un même vecteur colonne. Supposons par exemple que nous ayons à faire, dans le plan, deux changements de variables successifs. Les variables x_1 et x_2 sont successivement remplacées par y_1 et y_2, puis par z_1 et z_2. Les relations entre ces variables sont données par :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Le calcul « à la main », par substitution, confirme qu'il est compatible avec le produit tel que nous l'avons défini.

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/produit3.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/produit2.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/pdf/produit3.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/pdf/produit2.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/produit5.jsp

d. Propriétés du produit des matrices carrées d'ordre n

Nous nous intéressons à présent au produit des matrices carrées d'ordre n. Ce produit *n'est pas commutatif*, ce qui signifie que, dans le cas $n = 2$ par exemple, il existe une matrice A et une matrice B telles que $AB \neq BA$. Voici un exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 18 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$.

Certaines matrices ne sont pas *régulières* pour ce produit. On a, par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 22 & 11 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 22 & 11 \end{pmatrix}$: le produit de deux matrices distinctes par une même matrice donne deux matrices identiques. On n'est donc pas fondé à simplifier, par exemple en factorisant.

En revanche les propriétés d'*associativité* (effectuer BC puis multiplier à gauche par A revient au même qu'effectuer AB puis multiplier à droite par C) et de *distributivité par rapport à l'addition* (le produit de A par la somme de B et C est la somme des produits de A par B et C) font de l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 un cadre assez confortable pour les calculs.

B. Les matrices sont-elles inversibles ?

Nous avons vu que le produit des matrices carrées d'ordre 2 n'est pas commutatif. Le problème de la recherche d'un inverse pour une matrice donnée M s'exprime donc de la manière suivante : existe-t-il une matrice N telle que : $N \times M = M \times N = I_2$? Manifestement, la réponse n'est pas uniforme. Nous avons vu que les matrices ne sont pas *régulières* : il existe des matrices A, B et C telle que $A \times B = A \times C$, bien que B soit distincte de C. En vertu de la *distributivité* évoquée plus haut, il vient $A \times (B - C) = O_2$; il y a donc des *diviseurs de O* dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2. Il vaut donc mieux poursuivre l'étude sous la forme suivante :

a. Condition pour qu'une matrice carrée d'ordre 2 soit inversible

On se donne une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et on cherche s'il existe une matrice $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que $AB = BA = I$. La première égalité s'écrit : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}z & a_{11}y + a_{12}t \\ a_{21}x + a_{22}z & a_{21}y + a_{22}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On obtient deux systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues : $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}z = 1 \\ a_{21}x + a_{22}z = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} a_{11}y + a_{12}t = 1 \\ a_{21}y + a_{22}t = 0 \end{cases}$.

Les seconds membres des équations de chacun de ces deux systèmes nous indiquent que la condition nécessaire pour qu'ils admettent des solutions (et en l'occurrence, ce sera un couple de solutions unique) s'écrit

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0. \quad \text{(D)}$$

La quantité $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ est appelée *déterminant* de la matrice. On vérifie que si le déterminant est non nul, et si on pose $B=\begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} & \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} \end{pmatrix}$, les produits AB et BA sont tous les deux égaux à I. La condition (D) est donc une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité.

Ressource : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/inverse4.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/inverse6.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/pdf/inverse1.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/inverse1.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/inverse3.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/inverse5.jsp

C. Puissances de matrices carrées d'ordre 2 ou 3

Les problèmes rencontrés dans la première partie nous ont amenés à calculer des puissances de matrices (c'est-à-dire à faire agir un certain nombre de fois consécutivement la même matrice). On peut faire les calculs avec une calculatrice pour des matrices de petite taille et des puissances raisonnables, on peut faire les calculs à l'aide d'un logiciel pour des puissances explicites, à l'aide d'un logiciel de calcul formel pour obtenir des formules « closes », donnant l'expression des coefficients en fonction de l'exposant, mais il est a priori plus difficile d'obtenir ce que nous avons appelé des *limites*.

a. Quelques matrices particulières

1. **Les matrices triangulaires** ont des puissances triangulaires.

Considérons par exemple la matrice $T=\begin{pmatrix} a & d & f \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Une telle matrice est dite triangulaire supérieure, car ses coefficients situés sous la diagonale principale sont nuls. On obtient : $T^2=\begin{pmatrix} a^2 & ad+bd & af+de+cf \\ 0 & b^2 & be+ec \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$. On pourrait poursuivre par une démonstration par récurrence pour achever de prouver ce résultat. Notons que les matrices *strictement triangulaires* comme $U=\begin{pmatrix} 0 & d & f \\ 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont leurs puissances nulles à compter de la troisième au plus. En effet : $U^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ed \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $U^3=O_3$. Les matrices dont les puissances sont nulles à partir de l'une d'entre elles sont dites *nilpotentes*.

Une application des matrices triangulaires est présentée au II. F.

2. Les matrices **diagonales** (dont tous les coefficients non situés sur la diagonale principale sont nuls) ont des puissances diagonales, dont les coefficients sont les puissances des coefficients initiaux.

3. D'une façon générale, les matrices « creuses », celles dont beaucoup de coefficients sont nuls, sont recherchées, car cette particularité permet de gagner du temps de calcul machine. Ce gain de temps est aussi dû à la possibilité de réaliser des produits de matrices « par blocs ».

Considérons les matrices $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 8 & -4 \\ 11 & 0 & -5 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 3 & 9 \\ \hline -1 & 7 & 2 & -8 \end{array}\right)$ et $B=\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 7 & 8 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 11 \\ \hline 1 & -5 & 7 & 2 \end{array}\right)$. Les lignes horizontales ou verticales tracées font apparaître des matrices, pour A : $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{pmatrix}$ et pour B : $B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{pmatrix}$.

Par exemple, $A_{11}=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 11 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, $B_{22}=(7)$. Les produits envisagés ayant tous un sens (il y a compatibilité entre les tailles des matrices à multiplier à chaque étape, on souhaite écrire que :

$$AB=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} & A_{11}B_{13}+A_{12}B_{23} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} & A_{21}B_{13}+A_{22}B_{23} \\ A_{31}B_{11}+A_{32}B_{21} & A_{31}B_{12}+A_{32}B_{22} & A_{31}B_{13}+A_{32}B_{23} \end{pmatrix}$$

Et, constatant que les sommes de produits de matrices sont elles aussi réalisables, que :

$$AB=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 32 \\ 11 & 57 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & 20 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 \\ 78 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -28 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 94 \\ -22 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (0 \quad 4)+(9 \quad -45) & (-14)+(63) & (33)+(18) \\ (-1 \quad -13)+(-8 \quad 40) & (-39)+(-56) & (19)+(-16) \end{pmatrix} \quad AB=\begin{pmatrix} -2 & 52 & -31 & 86 \\ 11 & 57 & 78 & -22 \\ 9 & -41 & 49 & 51 \\ -9 & 27 & -95 & 3 \end{pmatrix}$$

Beaucoup de systèmes de calcul numérique travaillent, en interne, sur des listes ordonnées ou sur des tableaux. Si ces tableaux contiennent beaucoup de 0, les calculs seront plus faciles et sans doute plus justes, mais pas forcément moins longs si on n'a pas pris en compte l'abondance de ces 0. Dans les situations de problèmes « à compartiments », par exemple, il est fréquent qu'à partir d'un état on ne puisse passer qu'à un état voisin. La matrice de transition contient beaucoup de 0.

Le cas des matrices carrées *diagonales en blocs* est un de ces cas favorables. Il suffit, pour faire le produit de deux telles matrices de même taille, de les partitionner de telle sorte que les matrices de la diagonale principale soient carrées et que les autres matrices soient nulles. Par exemple, pour la matrice A ci-contre, le calcul de A^2 se résume au calcul des carrés de trois matrices carrées d'ordre 2 ou 3.

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \qquad A^2=\left(\begin{array}{cc|cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Mais il y a naturellement des situations, très nombreuses, dans lesquelles les premières puissances d'une matrice ne laissent pas conjecturer la forme de sa puissance n-ième. On peut avoir recours à la *diagonalisation*.

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/puissance1.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/puissance2.jsp

c. Diagonalisation éventuelle d'une matrice carrée d'ordre 2

Nous adoptons la définition suivante : on dit qu'une matrice carrée A est diagonalisable s'il existe deux matrices carrées P et Q inverses l'une de l'autre et des réels α et β tels que $A = Q\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}P$.

Compte-tenu de ce qui a été dit sur les matrices diagonales, on voit que, si la matrice A peut s'écrire :

$$A = Q \times D \times P,$$

où D est diagonale et où P et Q sont inverses l'une de l'autre, alors, pour tout entier naturel non nul n :

$$A^n = Q \times D^n \times P,$$

… ce qui facilite considérablement les calculs/

Une condition nécessaire pour que cette condition soit réalisée est qu'il existe des vecteurs colonnes V et W non nuls tels que les vecteurs colonnes AV et AW soient proportionnels à V et W.

En effet, écrivons A sous la forme : $A = \begin{pmatrix} \frac{d}{\Delta} & \frac{-b}{\Delta} \\ \frac{-c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Dans cette écriture, les coefficients sont supposés connus, et le déterminant Δ de la matrice P est non nul. Considérons les vecteurs $V = \begin{pmatrix} \frac{d}{\Delta} \\ \frac{-c}{\Delta} \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} \frac{-b}{\Delta} \\ \frac{a}{\Delta} \end{pmatrix}$. Ces vecteurs colonnes sont non nuls (car Δ n'est pas nul). Le calcul montre que $AV = \alpha V$ et $AW = \beta W$. La condition est donc bien réalisée.

Toutes les matrices carrées d'ordre 2 sont-elles diagonalisables ? Si on écrit la matrice A sous la forme : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, dire que le produit du vecteur colonne V par A est proportionnel à V, c'est dire qu'il existe un réel λ et un couple de réels non tous les deux nuls tels que $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Cette dernière condition s'écrit aussi : il existe des réels λ, x et y tels que $\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x + a_{12}y = 0 \\ a_{21}x + (a_{22} - \lambda)y = 0 \end{cases}$.

Mais, si le déterminant du système d'équations linéaires en x et y écrit ci-dessus n'est pas nul, il n'a que le couple nul comme condition, ce qui ne satisfait pas l'hypothèse. Notre hypothèse exige donc que ce déterminant soit nul, à savoir : $\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda-a_{21}a_{12}=0$.

L'existence des vecteurs colonnes V et W exige donc que l'équation du second degré en λ ci-dessus admette des solutions. Ce n'est pas toujours le cas. Considérons par exemple la matrice $J=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$. Pour elle, l'équation caractéristique s'écrit $\lambda^2+1=0$ …

Remarque : Dans ce qui précède, nous avons découvert une condition nécessaire pour qu'une matrice carrée d'ordre 2 soit diagonalisable. Nous avons ensuite donné des raisons expliquant que cette condition pouvait ne pas toujours être réalisée, et enfin nous avons donné un exemple explicite de matrice pour laquelle elle n'est effectivement pas réalisée. Il n'est donc pas vrai que toute matrice carrée d'ordre 2 soit diagonalisable. Ce qui précède indique qu'avec des matrices à coefficients complexes, les choses iraient peut-être mieux, mais nous sortirions du cadre.

Les réels α et β du début du paragraphe précédent s'appellent les valeurs propres de la matrice A. La suite du paragraphe prouve qu'une matrice carrée d'ordre 2 en possède au plus 2.

Si le produit d'un vecteur colonne V par une matrice donnée donne un vecteur colonne proportionnel à V, on dit que le vecteur V est un vecteur propre de la matrice.

D. Traitement matriciel des suites de Fibonacci

On s'intéresse ici à « la » suite de Fibonacci, définie par :
$u_0=1$, $u_1=1$, et, pour tout entier n : $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$.

Spirale de Fibonacci dans le métro de Naples

a. Recherche d'une formule « close » pour le terme général

On peut écrire, avec des notations à présent mieux maîtrisées :
$\begin{pmatrix}u_{n+2}\\u_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{n+1}\\u_n\end{pmatrix}$.

La matrice $F=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ peut être écrite comme le produit QDP,

où $D=\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt5}{2}&0\\0&\frac{1-\sqrt5}{2}\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{\sqrt5-1}{2\sqrt5}\\-\frac{1}{\sqrt5}&\frac{\sqrt5+1}{2\sqrt5}\end{pmatrix}$ et $Q=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt5+1}{2}&\frac{1-\sqrt5}{2}\\1&1\end{pmatrix}$.

Comme dans le paragraphe précédent, le produit PQ et le produit QP sont égaux et égaux à I. Un raisonnement par récurrence donne, pour tout n : $\begin{pmatrix}u_{n+1}\\u_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}u_1\\u_0\end{pmatrix}$,

ou encore :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

Tous calculs faits, pour tout n supérieur ou égal à 2 : $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.

Certains pourraient trouver ce résultat étonnant, remarquant qu'il est facile de prouver que tous les termes de la suite sont entiers. Pour se convaincre que la formule ci-dessus donne bien des entiers, comparer les termes d'ordre pair et les termes d'ordre impair des puissances à développer.

b. Trouve-t-on toujours une combinaison linéaire de suites géométriques ?

Nous avons écrit le terme général de la suite de Fibonacci de premiers termes 1 et 1 comme une combinaison linéaire des termes de deux suites géométriques. Les calculs précédents sont adaptables à toute suite u dont les deux premiers termes sont donnés, et telle qu'il existe deux réels a et b pour lesquels :

Pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$,pourvu que la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ associée soit diagonalisable (au sens utilisé jusqu'ici, c'est- à-dire qu'il existe deux matrices P et Q et une matrice D dont seuls les termes diagonaux sont non nuls telles que $M = QDP$).

On peut quand même s'inspirer du résultat précédent pour résoudre le problème sans examiner les conditions de « diagonalisabilité », si on peut dire.

c. Une étude des suites obéissant à une relation de récurrence linéaire d'ordre 2

On se donne des réels a et b (pour l'intérêt du problème, $b \neq 0$) et on définit une suite u par ses deux premiers termes u_0 et u_1 , et la relation de récurrence : pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ (***).

Il faudrait démontrer (par récurrence) que ces données définissent effectivement une suite ; passons.

Dans l'ensemble des suites satisfaisant la relation de récurrence (***), y a-t-il des suites géométriques ?

Pour une telle suite v, il existe des réels, α et r tels que pour tout n : $v_n = \alpha r^n$.

En écrivant que v satisfait la relation de récurrence (***), on obtient : Pour tout n, $\alpha r^n \left(r^2 - ar - b\right) = 0$.

Les cas $\alpha = 0$ et $r = 0$ sont à éliminer (par définition, peut-être, pour l'intérêt du problème, sûrement), et on doit étudier les solutions de l'équation $r^2 - ar - b = 0$.

1. Si cette équation admet deux solutions réelles ρ et σ (elles sont alors non nulles), toute suite géométrique de raison ρ , toute suite géométrique de raison σ satisfont la relation de récurrence (***), ainsi que toute combinaison linéaire de telles suites (résultat simple, mais qu'il faut prouver). La suite u est-elle une de ces combinaisons linéaires ?

On cherche α et β tels que pour tout n : $u_n = \alpha\rho^n + \beta\sigma^n$.

Écrivons les deux premières conditions nécessaires : $\begin{cases} u_0 = \alpha + \beta \\ u_1 = \alpha\rho + \beta\sigma \end{cases}$.

Ce système d'inconnues α et β a un déterminant non nul. Il admet donc une solution. On vérifie que les conditions nécessaires sont suffisantes (par récurrence). Le terme général de la suite u est bien combinaison linéaire des termes généraux de deux suites géométriques.

2. Si cette équation admet une seule solution, qui est alors $\frac{a}{2}$, toute suite géométrique v de raison $\frac{a}{2}$ vérifie la relation de récurrence (***). Observons le comportement de la suite s, de terme général $s_n = n\left(\frac{a}{2}\right)^n$.

Tous calculs faits, pour tout n : $s_{n+2} - as_{n+1} + \frac{a^2}{4}s_n = (n+2)\left(\frac{a}{2}\right)^{n+2} - a(n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^{n+1} + \frac{a^2}{4}n\left(\frac{a}{2}\right)^n = 0$,

D'où on déduit que la suite s est aussi solution de l'équation de récurrence. Toute combinaison linéaire des suites v et s est donc elle aussi solution. Il nous reste à chercher si l'une de ces combinaisons linéaires a pour premiers termes u_0 et u_1 donnés. Une condition nécessaire s'écrit :

$\begin{cases} u_0 = \alpha\left(\frac{a}{2}\right)^0 + \beta \times 0 \times \left(\frac{a}{2}\right)^0 \\ u_1 = \alpha\left(\frac{a}{2}\right)^1 + \beta \times 1 \times \left(\frac{a}{2}\right)^1 \end{cases}$, qui fournit un couple (α, β). On vérifie que la suite ainsi définie est bien la suite u.

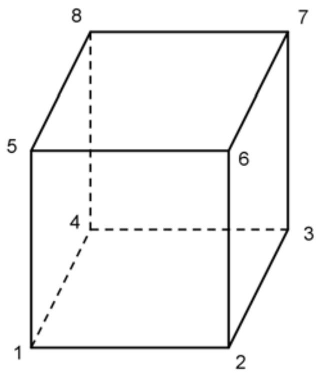
3. (*Si on trouve qu'il y a « trop de lettres », cette partie peut être remplacée par une illustration sur un exemple*)

Si cette équation n'admet pas de solution réelle, on peut passer, pour un moment, dans le domaine des suites à termes complexes (le vocabulaire est le même). Appelons ρ et $\overline{\rho}$ les solutions (qui sont des complexes conjugués, les coefficients a et b étant réels) de l'équation $r^2 - ar - b = 0$. Toute combinaison linéaire à coefficients complexes de suites géométriques de raisons ρ et $\overline{\rho}$ est solution, suite à termes complexes, de l'équation de récurrence (***). Le terme général t_n d'une telle suite est une combinaison linéaire (à coefficients complexes) de ρ^n et $\overline{\rho}^n$, donc une combinaison linéaire (à coefficients complexes, pas les mêmes bien sûr) de $\tau^n \cos n\theta$ et $\tau^n \sin n\theta$, où τ est le module de ρ et θ est un argument de ρ. Il ne reste plus qu'à voir s'il existe une combinaison linéaire (à coefficients réels) des suites de terme général respectif $\tau^n \cos n\theta$ et $\tau^n \sin n\theta$ qui soit la suite u de départ, donc pour commencer chercher s'il existe des réels α et β tels que $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_1 = \alpha\tau\cos\theta + \beta\tau\sin\theta \end{cases}$ puis vérifier que ces coefficients conviennent (les τ et θ ne doivent pas effrayer, ils se calculent directement à partir de a et b, donnés).

E. Retour sur les marches aléatoires

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons de nouveau à des marches aléatoires, dans le but de montrer qu'on peut dans certains cas découvrir des formules de récurrence pour déterminer les puissances n-ièmes de matrices de forme particulière.

a. Marche aléatoire sur un cube



Dans la marche aléatoire aux sommets d'un cube, le personnage peut passer à chaque étape d'un sommet à un des trois sommets voisins. Nous supposons qu'il y a équiprobabilité. On associe à cette situation la matrice de transition suivante, dans laquelle le coefficient situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne est la probabilité qu'un mouvement partant du sommet i s'achève au sommet j.

Cette matrice est :

$$M=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les particularités de cette matrice (elle est *symétrique*, c'est-à-dire symétrique par rapport à la diagonale principale, elle est décomposable en quatre blocs dont deux sont la matrice identité d'ordre 4) permettent de trouver intuitivement la forme de sa puissance n-ième.

Il existe quatre suites, u_n, v_n, w_n et x_n, dont les termes sont les coefficients de la matrice M^n ainsi qu'il suit :

$$M^n=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$$, où a, b, c et d sont les quatre matrices carrées d'ordre 2 définies comme suit :

$$a=\begin{pmatrix} u_n & v_n \\ v_n & u_n \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} w_n & v_n \\ v_n & w_n \end{pmatrix},\ c=\begin{pmatrix} u_n & w_n \\ w_n & u_n \end{pmatrix} \text{ et } d=\begin{pmatrix} x_n & w_n \\ w_n & x_n \end{pmatrix}$$

Où, finalement :

$$u_n=\frac{1+(-1)^n}{8}\cdot\frac{3^n+3}{3^n} \qquad v_n=\frac{1-(-1)^n}{8}\cdot\frac{1+(-1)^n}{3^n}$$

et

$$w_n=\frac{1+(-1)^n}{8}\cdot\frac{3^n-1}{3^n} \qquad v_n=\frac{1-(-1)^n}{8}\cdot\frac{3^n-3}{3^n}$$

D. Résolution des systèmes linéaires

a. En guise de mise en garde

Dans cette partie, nous allons aborder une méthode de résolution des systèmes linéaires. L'algorithme de Gauss-Jordan produit à la fois un résultat théorique sur la qualité des solutions d'un tel système et une méthode de résolution explicite. Qui dit résolution explicite dit calculs, calculs effectués par des machines. Nous allons voir qu'il est important de contrôler les instructions données aux machines pour parvenir à un résultat fiable.

Nous empruntons cet exemple à l'ouvrage « Mathématiques seconde » de Maurice Glaymann et Joël Malaval, CEDIC éditeur, 1981.

On se propose de résoudre le système : $\begin{cases} 1,985a - 1,358b = 2,212 \\ 0,953a - 0,652b = 1,062 \end{cases}$

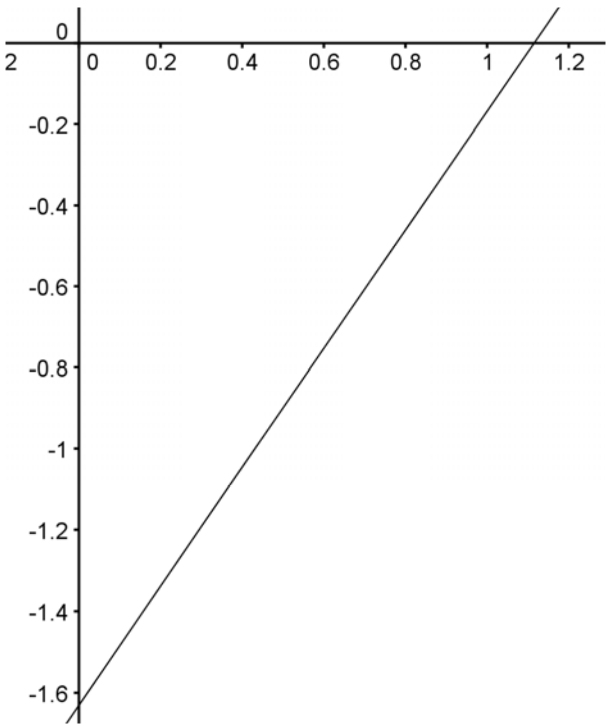
1. Résoudre ce système en effectuant les calculs avec 3 décimales

Si on arrondit les deux produits nécessaires au calcul du déterminant au millième, on trouve un résultat nul. Le système n'a pas de solution, les seconds membres étant distincts.

2. Résoudre ce système en effectuant les calculs avec 6 décimales

L'arrondi au millionième ne portant que sur le dernier calcul, on trouve a = 0,608 696 et b = − 0,739 13.

3. Interpréter géométriquement ce système dans un repère orthonormé (unité graphique 10 cm) puis tabulez les fonctions correspondantes entre 0,608 65 et 0,608 75.



Les deux droites ne sont pas distinguables

x	f(x)-g(x)
0,60865	-2,37177E-09
0,60866	-1,85224E-09
0,60867	-1,33271E-09
0,60868	-8,13177E-10
0,60869	-2,93647E-10
0,6087	2,25883E-10
0,60871	7,45412E-10
0,60872	1,26494E-09
0,60873	1,78447E-09
Avec un pas plus faible :	
0,608692	-1,89741E-10
0,608694	-8,58353E-11
0,608696	1,80704E-11
0,608698	1,21977E-10
0,6087	2,25883E-10
0,608702	3,29788E-10
0,608704	4,33694E-10

La tabulation montre que, si les droites apparaissent identiques, même à grande échelle, sur le graphique, elles ne le sont pas.

4. Résoudre le système $\begin{cases} 1,985a - 1,358b = 2,212 \\ 0,953a - 0,652b = 1,061 \end{cases}$

Cette fois, on trouve a = 30, 1304… et b = 42,4130…

Autrement dit, une variation minime d'une des données peut modifier considérablement la solution.

b. Systèmes équivalents à un système linéaire donné

Un système d'équations linéaires est écrit sous la forme $AX = K$, où A est une matrice de taille $m \times n$, dite *matrice des coefficients*, K une matrice colonne de taille $m \times 1$, dite *matrice des constantes*, ainsi que X. Une solution du système est un vecteur colonne de taille $n \times 1$ tel que l'égalité $AS = K$ soit vraie.

Résoudre le système, c'est en trouver l'ensemble des solutions. Deux systèmes sont dits *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions. Un système est dit *homogène* si sa matrice des constantes est nulle. Son ensemble de solutions est appelé *noyau* de la matrice des coefficients.

On appelle *matrice augmentée* du système $AX = K$ la matrice $\left(A \mid K\right)$ construite en accolant A et K. Les *opérations élémentaires de ligne* décrites ci-dessous transforment la matrice $\left(A \mid K\right)$ en une matrice $\left(A' \mid K'\right)$ de même taille, matrice augmentée d'un système équivalent au système $AX = K$.

Opérations élémentaires de ligne	Les opérations élémentaires de ligne d'une matrice sont désignées par L. On désigne par $L(M)$ la matrice obtenue en faisant subir à la matrice M l'opération L. On peut : **1.** Multiplier une ligne par un scalaire non nul, par exemple multiplier la ligne i par le scalaire c. Cette opération est désignée par $L_i\left(c\right)$. **2.** Intervertir deux lignes, par exemple les lignes i et j. Cette opération est notée L_{ij}. **3.** Additionner aux éléments d'une ligne le produit par un scalaire des éléments d'une autre ligne. Par exemple, $L_{ij}\left(c\right)$ désigne la somme de la ligne i et du produit de la ligne j par c, ce qui suppose $i \neq j$ et $c \neq 0$.

c. Écriture matricielle des opérations élémentaires de ligne

On appelle *matrice élémentaire* (d'ordre n) toute matrice carrée obtenue en appliquant une opération élémentaire de ligne L à la matrice identité (d'ordre n).

On démontre que, pour toute opération élémentaire de ligne L et pour toute matrice A de taille $m \times n$, $L\left(A\right) = L\left(I_m\right)A$.

Toute succession d'opérations élémentaires de ligne se traduit donc par le produit (à gauche) de la matrice de départ par des matrices élémentaires.

d. Algorithme de Gauss-Jordan

Les résultats précédents prouvent qu'on peut transformer toute matrice A en une matrice B, dite ***l-réduite*** :

1. Toutes les lignes nulles sont en-dessous des lignes non nulles ;

2. Dans chaque ligne non nulle, le premier élément non nul est 1. La colonne dans laquelle se trouve cet élément s'appelle la *colonne pivot* de la ligne ;

3. Dans la colonne pivot d'une ligne, les éléments situés sur les autres lignes sont nuls.

B est dite ***l-réduite échelonnée*** si, de plus :

4. Les colonnes pivots apparaissent en ordre croissant.

Théorème admis : Pour toute matrice A, il existe une unique matrice l-réduite échelonnée équivalente (c'est-à-dire matrice augmentée d'un système équivalent au système dont A est la matrice augmentée).

Conséquence : On peut mettre le système $AX = K$ sous une forme « triangulaire », dans laquelle la dernière ligne non nulle ne fait plus apparaître qu'une seule inconnue, la précédente deux, etc. Donc on sait le résoudre.

Algorithme de Gauss-Jordan (d'après *Algèbre linéaire, une approche matricielle*, Pierre LEROUX, Modulo Editeur, Outremont, Québec)

Début Lire m, n, A Poser i = 1, j = 1, *Terminé* = Faux	 $A = [a_{ij}]$ est la matrice que l'on désire réduire i est l'indice de la ligne et j l'indice de la colonne présentement traitées. *Terminé* est une variable booléenne permettant d'arrêter le processus de réduction dès que toutes les lignes qui restent sont nulles.
Tant que $i \leq m$ et *Terminé* = Faux, faire : Début Tant que tous les éléments de la colonne j situés sur la ligne i ou en dessous de cette ligne sont nuls et $j \leq n$, faire : $j \leftarrow j+1$.	 Détermination de la colonne pivot de la ligne i, notée j_i.
Si $j = n + 1$, faire : *Terminé* ←vrai Sinon, faire : Début Poser $j_i = j$.	
Poser p = indice de la ligne où se trouve le plus grand élément (en valeur absolue) de la colonne j situé sur la ligne i ou en dessous de cette ligne.	Ce choix de a_{pj} comme pivot permet, la plupart du temps, de minimiser les erreurs d'arrondi de la machine.
Si $p \neq i$, faire : $A \leftarrow L_{ip}(A)$	Placement du pivot sur la ligne i.
$A \leftarrow L_i(1/a_{ij})(A)$	
Pour q = 1, 2, …, m sauf $q = i$, faire : $A \leftarrow L_{qi}(-a_{qj})(A)$	Pivotage faisant apparaître des 0 dans la colonne j, sauf en $a_{ij} = 1$
Fin $i \leftarrow i + 1$ Fin	
Poser $R = A$	R est la l-réduite échelonnée de A
Imprimer R Fin	

Partie III

L'outil matrices à l'œuvre

Compléments et exemples

Dans cette partie, nous serons amenés à utiliser des propriétés des matrices, ou des représentations matricielles de situations sans revenir sur ce qui a été développé dans la partie II. Tous les résultats ne sont pas établis, et ce point n'est pas nécessairement précisé chaque fois. Certaines des applications proposées devraient motiver les élèves et susciter des vocations : aider les élèves à affirmer leur choix d'études supérieures longues est le but de l'enseignement de spécialité mathématiques.

1. Matrices en arithmétique

A. Cryptographie : le chiffre de Hill

a. Introduction et principe

Dans les plus anciens systèmes de cryptographie, chaque lettre est remplacée par une autre lettre, toujours la même. Les premières améliorations consistèrent à remplacer une lettre donnée par une autre, choisie en fonction de la place de la lettre à coder dans le texte de départ (en utilisant un mot-clef, par exemple). Le système de Hill (Lester S. Hill, *Concerning certain linear transformation apparatus of cryptography*, in American mathematical monthly, vol 38, (1931), p135 – 154) transforme des chaînes de caractères de longueur donnée, chaque lettre étant alors transformée en fonction de sa valeur et de sa place dans la chaîne de caractères.

On se donne un entier naturel n supérieur ou égal à 2. Le texte à chiffrer est découpé en blocs successifs de n lettres. S'il y a un reste, on peut compléter arbitrairement le texte ou l'amputer du bloc incomplet. Les lettres de chaque bloc sont remplacées par des nombres (généralement A = 0, B = 1, C = 2, …, Z = 25), et à chaque bloc de lettres est associée une matrice colonne B_i de taille $n \times 1$. On se donne une matrice carrée M d'ordre n, appelée *matrice de chiffrement*, connue de l'expéditeur et du destinataire du message, à coefficients entiers naturels. Le produit $C_i = MB_i$ est une matrice colonne qui peut à son tour être transformée en une suite de n lettres, chacun de ses éléments étant ramené à son reste *modulo* 26 puis transformé en la lettre correspondante de l'alphabet. Pour décoder, il faudra faire le chemin inverse (si toutefois la suite des deux opérations produit de la colonne par la matrice suivie de détermination du reste *modulo* 26 est « inversible »).

b. Exemple

Utilisons la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Soit à chiffrer le texte CODAGE DE HILL. Le découpage en blocs de deux lettres et leur transformation en matrices colonnes donne : $\begin{pmatrix} 2 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Les matrices colonnes obtenues par l'action de M sur les matrices colonnes précédentes sont :

$\begin{pmatrix} 74 \\ 62 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 32 \\ 34 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 26 \\ 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 54 \\ 53 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 77 \\ 77 \end{pmatrix}$, qui, *modulo* 26, donnent : $\begin{pmatrix} 22 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \end{pmatrix}$.

Le texte crypté est donc WK GJ GI AZ CB ZZ. Nous verrons par la suite comment le décrypter.

Utilisons la matrice $N = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$. Soit à chiffrer le texte AMER. Les mêmes procédés donnent les matrices colonnes $\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 17 \end{pmatrix}$, transformées en $\begin{pmatrix} 24 \\ 96 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 \\ 148 \end{pmatrix}$, ou encore en $\begin{pmatrix} 24 \\ 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \end{pmatrix}$, le texte crypté est donc YS YS.

Ce qui pose un problème, deux groupes de deux lettres différents ayant été cryptés de la même manière. On voit les difficultés du décryptage…

c. Réversibilité du cryptage

Si les deux matrices colonnes, produits respectifs de deux matrices colonnes distinctes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sont formées d'éléments ayant respectivement même reste modulo 26, on peut écrire :

$$\begin{cases} ax + by \equiv aX + bY \mod 26 \\ cx + dy \equiv cX + dY \mod 26 \end{cases},$$

On suppose par exemple que *x* et *X* sont distincts. Le système précédent conduit, en vertu des propriétés des congruences, à $(ad - bc)(x - X) \equiv 0 \mod 26$.

Cette relation exprime le fait que 26 est un diviseur de $(ad - bc)(x - X)$, or $(x - X)$ est en valeur absolue strictement inférieur à 26 et non nul. Les diviseurs premiers de 26 (2 et 13) ne peuvent donc tous deux diviser $(x - X)$. Il s'ensuit que $(ad - bc)$ et 26 ne sont pas premiers entre eux.

La condition « $(ad - bc)$ est premier avec 26 » est donc une condition nécessaire pour que deux blocs de deux lettres différents soient cryptés différemment.

Nous admettons que cette condition est suffisante pour assurer le décryptage de tout message.

d. Exemple de décodage

La matrice M = $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est certes inversible, mais sa matrice inverse, telle qu'elle a été définie précédemment :

$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$ ne répond pas au problème posé.

On cherche une matrice N à coefficients entiers telle que les coefficients des matrices MN, NM et I_2 soient congrus modulo 26.

Le calcul précédent fait apparaître que $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 7\,\mathrm{I}_2$.

Il ne reste donc plus qu'à déterminer l'inverse de 7 modulo 26, c'est-à-dire un entier *u* tel que $7u \equiv 1$ mod 26. Ce problème revient à chercher deux entiers u et *v* tels que $7u + 26v = 1$. Comme 7 et 26 sont premiers entre eux, ces entiers existent. Les seuls entiers *u* et *v* tels que *u* soit compris entre 0 et 25 sont $u = 15$ et $v = -4$.

On a donc $15 \times 7 \equiv 1$ mod 26 ce qui se traduit par 15 est l'inverse de 7 modulo 26.

La matrice inverse modulo 26 de M = $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est donc la matrice $\mathrm{M}' = 15\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Cette matrice est égale à $\begin{pmatrix} 18 & 23 \\ 19 & 22 \end{pmatrix}$ modulo 26.

Le texte crypté, scindé en blocs de deux lettres est WK GJ GI AZ CB ZZ.

Les rangs correspondants sont $\begin{pmatrix}22\\10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\25\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}25\\25\end{pmatrix}$.

Le bloc Y décrypté est obtenu en calculant le produit $\mathrm{M}'\mathrm{Y}$ modulo 26, soit

$$\begin{pmatrix}626\\638\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}315\\312\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}292\\290\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}575\\550\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}59\\60\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1025\\1025\end{pmatrix}$$

ce qui donne, modulo 26

$$\begin{pmatrix}2\\14\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}$$

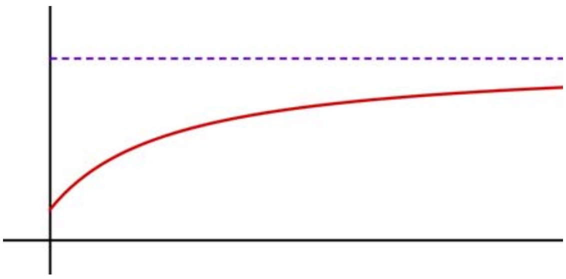
et qui permet de retrouver le texte initial CODAGEDEHILL.

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/crypto/hill1.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/crypto/hill2.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/crypto/hill3.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/inverse7.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/inverse8.jsp

B. Approximation des nombres réels

a. Quelques rappels sur les fonctions homographiques

Nous nous intéressons aux fonctions homographiques à coefficients entiers définies sur $\mathbf{R}^+$, c'est-à-dire aux fonctions f définies sur $\mathbf{R}^+$ pour lesquelles il existe des entiers naturels *a*, *b*, *c*, et *d* tels que, pour tout réel positif *x*, $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}\cdot$ Parmi ces fonctions, certaines sont constantes (celles pour lesquelles $ad-bc=0$), certaines sont affines (celles pour lesquelles $c=0$).



Il peut donc y avoir débat d'auteurs sur la définition.

Pour l'instant, nous nous contentons d'écarter la situation $c=d=0$, pour laquelle il n'y a tout simplement pas de fonction. On peut aussi observer que le quadruplet (a,b,c,d) servant à caractériser une fonction comme homographique n'est pas unique. Bref, nous ne travaillons pas dans un cadre assuré. La propriété intéressante, que nous souhaitons utiliser pour cette étude, est qu'une fonction homographique à coefficients entiers naturels est monotone sur $\mathbf{R}^+$ et prend toutes les valeurs comprises entre $\dfrac{b}{d}$ et $\dfrac{a}{c}$ si elle est croissante, toutes les valeurs comprises entre $\dfrac{a}{c}$ et $\dfrac{b}{d}$ si elle est décroissante (on peut aussi dire que le sens de variation est donné par le signe de $ad-bc$).

b. Le calendrier : approximation d'un rationnel par un rationnel « plus simple »

Au début de l'année 2000, **l'année tropique** (intervalle de temps séparant deux passages du soleil dans la même position sur son orbite apparente – l'écliptique) était mesurée à **365,242 190 517 jours.**

Comment faire varier le nombre (entier) de jours dans une année sans bouleverser les habitudes de vie ?

C'est la question que des gouvernants ont eu à résoudre (en Égypte antique, à Rome sous Jules César, en Europe au XVIe siècle).

Les égalités suivantes, obtenues en utilisant l'algorithme d'Euclide :

$$1\,000\,000\,000 = 4\times 242\,190\,517 + 31\,237\,932$$
$$242\,190\,517 = 7\times 31\,237\,932 + 23\,524\,993$$
$$31\,237\,932 = 1\times 23\,524\,993 + 7\,712\,939$$
$$23\,524\,993 = 3\times 7\,712\,939 + 386\,176$$
$$7\,712\,939 = 19\times 386\,176 + 375\,595$$
$$386\,176 = 1\times 375\,595 + 10\,581$$

permettent d'écrire

$$\frac{242\,190\,517}{1\,000\,000\,000} = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{19+\cfrac{1}{1+\cfrac{10\,581}{375\,595}}}}}}}$$

Remarque : On peut naturellement poursuivre l'algorithme, mais cela n'aurait pas de lien avec l'objectif, qui est de fournir des approximations permettant de fabriquer un calendrier. Le calendrier grégorien prévoit d'ajouter 97 jours tous les 400 ans (1 jour tous les 4 ans sauf pour les millésimes multiples de 100 mais pas de 400). Rappelons que le rapport entre la durée de l'année tropique et celle du jour sidéral – durée de la rotation de la Terre sur elle-même – subit des variations telles qu'il est illusoire de les prévoir sur plusieurs milliers d'années.

Comme dit précédemment, pour tout réel positif *x*, $\frac{1}{x+4}$ est compris entre 0 et $\frac{1}{4}$. L'ajout d'un jour tous les quatre ans à l'année calendaire est donc exagéré. Si on poursuit les calculs, on peut écrire : $\frac{242\,190\,517}{1\,000\,000\,000} = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+y}} = \frac{y+7}{4y+29}$, ce qui permet d'affirmer que $\frac{242\,190\,517}{1\,000\,000\,000}$ est supérieur à $\frac{7}{29}$. Ajouter 7 jours tous les 29 ans à l'année calendaire n'est pas suffisant. Poursuivons les calculs à l'étape suivante :

$\frac{242\,190\,517}{1\,000\,000\,000} = \frac{7z+8}{29z+33}$ montre que $\frac{8}{33}$ est une nouvelle approximation, meilleure que $\frac{1}{4}$ bien qu'encore exagérée.

Les fractions suivantes, $\frac{31}{128}$ et $\frac{597}{2465}$ sont successivement des approximations par défaut et par excès des modifications à apporter au calendrier pour s'approcher du rapport entre la durée de l'année tropique et celle du jour sidéral. Les valeurs approchées fournies sont (d'un certain point de vue qui sera développé dans la partie III) les meilleures possibles, mais on ne retrouve pas parmi elles les $\frac{97}{400}$ du calendrier grégorien.

Il est possible d'écrire ces calculs autrement : chaque nouvel « étage » de la fraction écrite plus haut peut être interprété comme l'intervention d'une fonction homographique. En appelant f_n la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par $f_n(x)=\dfrac{1}{x+n}$, on peut écrire $\dfrac{242190517}{1000000000}=f_4\circ f_7\circ f_1\circ f_3\circ f_{19}\circ f_1\left(\dfrac{10581}{375595}\right)$. Cette décomposition montre que les approximations trouvées le sont sous forme irréductible, et alternativement par excès et par défaut (les fonctions qu'on compose sont toutes décroissantes).

Il est possible de placer les coefficients des fonctions homographiques intervenant dans des tableaux, de sorte que, f_n étant représentée par $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & n\end{pmatrix}$, $f_n\circ f_p$ le serait par $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & p\\ n & 1+np\end{pmatrix}$, forme qui illustre le fait que $f_n\circ f_p$ est différente de $f_p\circ f_n$ dès que n et p sont différents.

c. L'exemple de $\sqrt{2}$

Le nombre $\sqrt{2}$ est la solution positive de l'équation $x^2-2=0$, qui peut encore s'écrire $x=\dfrac{x+2}{x+1}$, puisque -1 n'en est pas solution. Ce nombre est donc sa propre image par l'application de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$ qui donne de tout réel positif l'image $\dfrac{x+2}{x+1}\cdot$ Les paragraphes précédents fournissent un premier résultat : $\sqrt{2}$ est compris entre 1 et 2.

Mais on peut aussi écrire que $\sqrt{2}$ est solution de $x=\dfrac{\dfrac{x+2}{x+1}+2}{\dfrac{x+2}{x+1}+1}$, par une substitution légitime. Tous calculs faits, on obtient : $x=\dfrac{3x+4}{2x+3}$, qui nous montre cette fois que $\sqrt{2}$ est compris entre $\dfrac{4}{3}$ et $\dfrac{3}{2}$. À l'étape suivante, en reprenant l'égalité $x=\dfrac{x+2}{x+1}$, on trouvera que $\sqrt{2}$ est solution de $x=\dfrac{7x+10}{5x+7}$, et que ce nombre est compris entre $\dfrac{7}{5}$ et $\dfrac{10}{7}$ (l'écart est inférieur à 3 centièmes). L'étude de cet exemple sera poursuivie dans la partie III.

d. Introduction du produit des matrices

Les calculs précédents nous ont donné l'idée que la composée de deux fonctions homographiques est elle-même une fonction homographique (résultat à vérifier : pour tout x, $\dfrac{a'\dfrac{ax+b}{cx+d}+b'}{c'\dfrac{ax+b}{cx+d}+d'}=\dfrac{\left(a'a+b'c\right)x+a'b+b'd}{\left(c'a+d'c\right)x+c'b+d'd}$, avec les précautions évoquées en ***a.***) dont les coefficients se calculent comme s'opèrent les produits de matrices de la calculatrice, que finalement cette correspondance pourrait servir à définir.

On utilise en général des notations faisant apparaître les rangs de la ligne et de la colonne où figure le coefficient, pour écrire :

Pour tous réels $a_{11}, a_{12}, \ldots, a'_{21}, a'_{22}$: $\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11}a_{11} + a'_{12}a_{21} & a'_{11}a_{12} + a'_{12}a_{22} \\ a'_{21}a_{11} + a'_{22}a_{21} & a'_{21}a_{12} + a'_{22}a_{22} \end{pmatrix}$

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/homographique1.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/homographique2.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/homographique3.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/homographique4.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/matrice/homographique5.jsp

e. Le cas du nombre d'Or

Le nombre d'Or, noté Φ, est la racine positive de l'équation $x^2 = x+1$. Il peut également être considéré comme un *point fixe* de l'application *f*, définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$. Nous allons suivre une démarche analogue à celle pratiquée dans la Partie I, paragraphe C.

La fonction *f* est décroissante sur $[1, +\infty[$ et prend des valeurs comprises entre 1 et 2. Φ étant un point fixe de cette fonction, on peut obtenir un premier encadrement : $1 \leqslant \Phi \leqslant 2$.

La relation $f \circ f(\Phi) = f(\Phi) = \Phi$ montre que Φ est compris entre les extremums de la fonction $f \circ f$. Comme, pour tout x élément de $[1, +\infty[$, $f \circ f(x) = \dfrac{\frac{x+1}{x}+1}{\frac{x+1}{x}} = \dfrac{2x+1}{x+1}$, on déduit $\dfrac{3}{2} \leqslant \Phi \leqslant 2$. Nous avons donc amélioré l'approximation par défaut de Φ. L'itération suivante consiste à composer une fonction croissante ($f \circ f$) par une fonction décroissante (*f*). On obtient une fonction décroissante fournissant une nouvelle approximation par excès de Φ. La poursuite du procédé nous donne deux *suites adjacentes* convergeant l'une et l'autre (bien sûr) vers Φ.

f. Les réduites

L'analogie matricielle introduite dans la Partie I conduit ici à considérer la suite des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$.

Ces matrices satisfont à la relation de récurrence $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + b_n & a_n \\ c_n + d_n & c_n \end{pmatrix}$, où on voit poindre les suites de Fibonacci. Le quotient du premier terme de la première colonne de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ par le second est une valeur approchée de Φ, alternativement par excès et par défaut. Ces nombres sont appelés *réduites du développement en fraction continue de* Φ.

Le terme *fraction continue* lui-même provient de l'écriture possible : $\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots \quad \ddots + \cfrac{1}{1+\Phi}}}}$.

Les réduites du développement de Φ en fraction continue sont données par le tableau :

1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	…
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	…

g. Les réduites comme « meilleures approximations rationnelles »

Plus généralement, considérons un nombre réel positif x. Soit a_1 le plus grand entier inférieur ou égal à x. On peut écrire : $x = a_1 + u = a_1 + \frac{1}{y}$. Le nombre y est à son tour un nombre positif auquel on peut appliquer le même traitement : $x = a_1 + u = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{z}}$. Et ainsi de suite. On associe aux fonctions homographiques utilisées les matrices $\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, etc., qui ont toutes pour déterminant -1. Appelons $P_n = \begin{pmatrix} N_n & \alpha_n \\ D_n & \beta_n \end{pmatrix}$ le produit des n premières. On a alors : $P_{n+1} = \begin{pmatrix} N_n & \alpha_n \\ D_n & \beta_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_n a_{n+1} + \alpha_n & N_n \\ D_n a_{n+1} + \beta_n & D_n \end{pmatrix}$.

Les quotients des éléments de la première colonne de la matrice P_n s'écrivent sous la forme de fractions irréductibles (le déterminant de P_n est 1 ou -1, on applique le théorème de Bézout) et la relation précédente montre que le produit par la matrice $\begin{pmatrix} a_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ fait glisser en quelque sorte la première colonne vers la droite.

Considérons deux réduites successives $\frac{N_n}{D_n}$ et $\frac{N_{n+1}}{D_{n+1}}$, et supposons, pour fixer les idées, que $\frac{N_{n+1}}{D_{n+1}} > \frac{N_n}{D_n}$.

Rappelons que $N_{n+1}D_n - D_{n+1}N_n = 1$ et que $\frac{N_{n+1}}{D_{n+1}} - \frac{N_n}{D_n} = \frac{1}{D_{n+1}D_n}$.

Considérons un nombre rationnel $\frac{X}{Y}$ compris entre les deux : $\frac{N_{n+1}}{D_{n+1}} > \frac{X}{Y} > \frac{N_n}{D_n}$.

Cherchons deux nombres x et y tels que $N_{n+1}x + N_n y = X$ et $D_{n+1}x + D_n y = Y$. On trouve $x = D_n X - N_n Y$ et $y = N_{n+1}Y - D_{n+1}X$. Ces deux nombres sont positifs, d'après ce qui précède, et ceci nous permet de conclure que X et Y sont respectivement plus grands que N_{n+1} et D_{n+1}.

Les réduites sont donc les meilleures approximations au sens suivant : toute approximation du nombre x plus précise que l'une quelconque des réduites a des termes plus grands que les siens.

2. Matrices et probabilités

A. La fougère de Barnsley

a. Des modèles de croissance pour les plantes

L'observation de la disposition des feuilles sur les tiges des végétaux, de la disposition des boutons floraux ou des étamines, a guidé l'étude mathématique puis l'élaboration de modèles de croissance. On pourra consulter utilement à ce propos H.S.M. COXETER *Introduction to geometry*, Wiley éditeur (Chapitre *Phyllotaxis*) et le classique LINDENMAYER & PRUSINKIEWICZ *The algorithmic beauty of plants*, Springer éditeur.

Ces modèles trouvent une utilité toute particulière dans l'industrie cinématographique, par exemple, le même modèle permettant de tourner au même endroit (fictif) et consécutivement une scène de printemps et une scène d'hiver.

Les probabilités sont utilisées ici pour modéliser le comportement de la nature.

b. Une transformation du plan

Les **transformations** du plan sont les **applications** (*stricto sensu*, bijectives) du plan dans lui-même. Comme un point du plan est repéré par ses deux coordonnées x et y, une transformation peut aussi être vue comme une application de $\mathbf{R}$ dans lui-même. Par exemple,

$$f : M = (x, y) \longrightarrow M' = (x', y') = (x^3, x + y)$$

est une transformation du plan. Seules celles dites **affines** nous intéresseront ici. Pour une telle application, il existe des réels *a*, *b*, *c*, *d*, *u* et *v* tels que :

$$f : M(x,y) \mapsto M'(x',y') \text{ défini par : } (x',y') = (ax+by+u, cx+dy+v)$$

Ce qu'on peut donc aussi écrire :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Nous utilisons dans la suite quatre de ces transformations,

f_1, de matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,16 \end{pmatrix}$ et de vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	f_3, de matrice $A_3 = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,26 \\ 0,23 & 0,22 \end{pmatrix}$ et de vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1,6 \end{pmatrix}$
f_2, de matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,04 \\ -0,04 & 0,85 \end{pmatrix}$ et de vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1,6 \end{pmatrix}$	f_4, de matrice $A_4 = \begin{pmatrix} -0,15 & 0,28 \\ 0,26 & 0,24 \end{pmatrix}$ et de vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0,44 \end{pmatrix}$

b. La fougère de Barnsley (1988)

Voici le principe de sa construction, donné au pas à pas :

- Le premier point à dessiner est l'origine O, de coordonnées (0,0) ;
- Chacun des points suivants s'obtient en appliquant à son prédécesseur une transformation f , égale à f_1, f_2, f_3, f_4, avec les probabilités données par le tableau :

f	f_1	f_2	f_3	f_4,
$P(f = f_i)$	0,01	0,85	0,07	0,07

Le principe de construction peut être conservé pour créer d'autres variétés de végétaux fictifs, dites mutantes.

Voici le code ***Scilab*** *de la fougère de référence, et représentation de 10 000 points*

```
function
point_image=transformation(point_antecedent,
choix)
  if choix == 1 then
    A = [[0,0];[0,0.16]] ; V=[0;0];
  end
  if choix == 2 then
    A = [[0.85,0.04];[-0.04,0.85]] ; V=[0;1.6];
  end
  if choix == 3 then
    A = [[0.2,-0.26];[0.23,0.22]] ; V=[0;1.6]
  end
  if choix == 4 then
    A = [[-0.15,0.28];[0.26,0.24]] ; V=[0;0.44]
  end
  point_image = A * point_antecedent + V
endfunction

nPoints = 10000
P = zeros(2,nPoints);
for i = 2:nPoints
  tirage = rand();
  if tirage < 0.1 then choix = 1;
  else if tirage < 0.86 then choix = 2;
    else if tirage < 0.93 then choix = 3;
        else choix = 4;
      end
    end
  end
  P(:,i) = transformation(P(:,i-1),choix);
end

plot(P(1,:),P(2,:),"*g");
```

Une feuille de fougère obtenue grâce au programme de gauche

Une fleur, elle aussi « programmée
Photographie tirée de « The algorithmic beauty of plants »

B. Triangles rectangles pseudo-isocèles.

Points à coordonnées entières sur une hyperbole

a. Triangles rectangles pseudo isocèles

Appelons triangle rectangle pseudo isocèle (en abrégé, TRPI), tout triangle rectangle dont les côtés ont pour longueurs des **entiers** $a, a+1$, c, où c désigne la longueur de l'hypoténuse. Par exemple, la séquence (3, 4, 5) définit un TRPI. Elle définit même le « plus petit TRPI » quand on classe les TRPI dans l'ordre croissant des valeurs de a.

Les séquences $(a, a+1, c)$ sont des **triplets pythagoriciens particuliers**. Mais tous les triplets pythagoriciens ne donnent pas des TRPI, à commencer par les « multiples entiers » des longueurs des côtés d'un TRPI donné comme (6, 8, 10) ou (9, 12, 15) obtenus par homothétie. Le théorème de Pythagore caractérise les TRPI par les couples (a, c) d'entiers vérifiant l'équation diophantienne :

$$a^2+(a+1)^2=c^2 \quad (**)$$

Il est alors envisageable de rechercher exhaustivement les TRPI en incrémentant progressivement a et en testant le caractère entier du nombre c qui lui est associé.
Ce que nous réalisons sur le programme **Scilab** ci-contre, balayant toutes les valeurs de a comprises entre 1 et 1000.

```
for  a = 1:1000
   c = sqrt(2*a^2+2*a+1);
   if c == floor(c) then
      disp([a,a+1,c]);
   end
end
```

On obtient quatre solutions, les triplets (3, 4, 5), (20, 21, 29), (119, 120, 169) et (696, 697, 985).

b. Recherche d'une expression générale

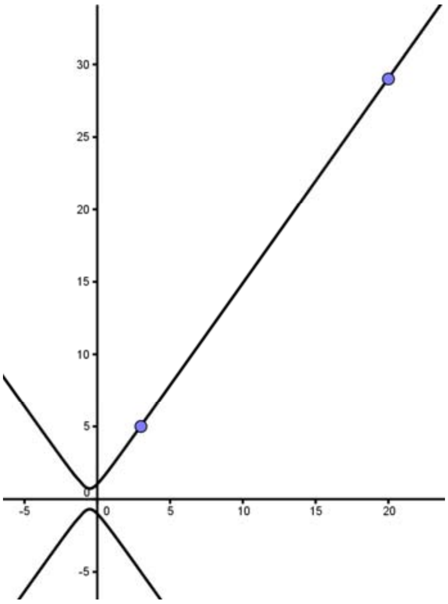
Le programme précédent fournit quatre solutions. Nous cherchons une expression générale fournissant toutes les solutions.

On définit par **récurrence** les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$ par $a_0=3$, $c_0=5$ et les relations de **couplage**, valables pour tout $n \geqslant 0$: $\begin{cases} a_{n+1}=3a_n+2c_n+1 \\ c_{n+1}=4a_n+3c_n+2 \end{cases}$.

Les raisons pour lesquelles on utilise ces relations dépassent le cadre de ce document. On peut vérifier que, si le couple (a_n, c_n) est solution de l'équation (**), le couple (a_{n+1}, c_{n+1}) est lui aussi solution, et une solution différente de (a_n, c_n). On peut également prouver que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante. À partir du couple (3, 5), on obtient donc une suite de couples solutions. On a en fait toutes les solutions, chose un peu plus délicate à prouver (la transformation qui, au point de coordonnées (x, y) associe le point de coordonnées (X, Y) définies par : $\begin{cases} X=3x-2y+1 \\ Y=-4x+3y-2 \end{cases}$ fait elle aussi passer d'un point solution d'abscisse x supérieure à 3 à un autre point solution d'abscisse X vérifiant $X-x=2(x-y)+1$, donc inférieure à x, puisque, x désignant la longueur du plus petit cathète et y celle de l'hypoténuse d'un TRPI, $x-y \leqslant -2$).

Les couples (a_n, c_n) se calculent de proche en proche. Ainsi, $(a_2, c_2)=(119,169)$, $(a_3, c_3)=(696,985)$, et $(a_4, c_4)=(4059,5741)$. Le qualificatif de « pseudo isocèles » donné à ces triangles est justifié : a_n grandissant très vite, la différence de longueur entre les deux cathètes devient minime.

c. Voyage sur une hyperbole



Si on se place dans un repère orthonormé, les points de coordonnées (a,c) appartiennent à la courbe d'équation $x^2+(x+1)^2=y^2$, qui est la réunion des courbes représentatives des fonctions $x\mapsto\sqrt{2x^2+2x+1}$ et $x\mapsto-\sqrt{2x^2+2x+1}$, symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des abscisses. Seule la branche de la courbe située dans le demi-plan constitué des points d'ordonnée positive contient des points dont le couple de coordonnées est solution de l'équation (**). Deux de ces points sont figurés sur le schéma ci-contre.

d. Des matrices pour expliciter les solutions

La construction récurrente décrite ci-avant constitue une première avancée. Mais pour parfaire notre étude, donnons une **expression close** des suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$ afin d'accéder directement à chacun des TRPI.

Nous pouvons représenter l'écriture $\begin{cases} a_{n+1}=3a_n+2c_n+1 \\ c_{n+1}=4a_n+3c_n+2 \end{cases}$ par $U_{n+1}=MU_n+V$,

où : $U_n=\begin{pmatrix} a_n \\ c_n \end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $M=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

On obtient successivement :

$$U_1=MU_0+V,\ U_2=M^2U_0+MV+V,\ U_3=M^3U_0+\left(M^2+M+I\right)V,\ \ldots$$

Sous réserve de poser $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de donner du sens aux additions et aux puissances de M.

Lorsque cela a été fait, on peut obtenir par récurrence le résultat suivant :

Pour tout entier naturel n, $U_n=M^nU_0+\left(M^{n-1}+M^{n-2}+\ldots+M^2+M+I\right)V$

Pour exprimer simplement les puissances de M, on a recours à la diagonalisation (lorsqu'elle est possible, c'est le cas ici, mais il est prématuré de discuter cette question). Ce procédé conduit à écrire M comme le produit :

$$M=PDQ$$

Où $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 3+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3-\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $Q=\begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

L'avantage de cette décomposition réside dans le fait que $PQ = QP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et qu'on peut exprimer la puissance n-ième de la matrice M plus facilement :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(3+\sqrt{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(3-\sqrt{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

On peut se demander où sont passés les nombres entiers, qui constituent le cadre de l'étude. Ils vont, ils doivent, réapparaître après ce passage, simplement destiné à permettre le calcul explicite des a_n et c_n.
On peut écrire, pour n assez grand :

$$M^{n-1} + M^{n-2} + \ldots + M^2 + M + I = P \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} \left(3+\sqrt{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n-1} \left(3-\sqrt{2}\right)^k \end{pmatrix} Q$$

Où on voit apparaître des sommes de termes de suites géométriques, et donc le bout des calculs. Finalement :

$$a_n = \frac{1+\sqrt{2}}{4}\left(3+\sqrt{2}\right)^n + \frac{1-\sqrt{2}}{4}\left(3-\sqrt{2}\right)^n - \frac{1}{2},$$

et

$$c_n = \frac{2+\sqrt{2}}{4}\left(3+2\sqrt{2}\right)^n + \frac{2-\sqrt{2}}{4}\left(3-2\sqrt{2}\right)^n.$$

On ne « voit » toujours pas les entiers dans ces écritures, mais on peut expliquer pourquoi a_n et c_n ainsi définis sont des entiers naturels.

C. Le problème du collectionneur

Un fabricant de produits alimentaires propose à ses acheteurs potentiels de constituer la carte de la France des 101 départements, chacun de ces départements étant figuré par un aimantin. Chaque conditionnement d'un certain produit contient un aimantin, les aimantins étant répartis de manière uniforme.
On se propose de déterminer le nombre moyen de boîtes qu'un collectionneur isolé, sans possibilité d'échanges avec d'autres personnes, doit se procurer pour réaliser la collection complète des départements.

a. Écriture de la matrice de transition

Nous allons représenter la situation comme une marche aléatoire entre des points situés sur une droite graduée, le point 0 représentant la situation du collectionneur n'ayant encore rien acquis, le point générique k celle du collectionneur ayant acquis k aimantins, le point 101 étant le point d'arrivée du parcours. On passe du point k au point $k+1$ avec la probabilité $\frac{101-k}{101}$, on reste au point k avec la probabilité $\frac{k}{101}$. Dans la suite, nous utiliserons n à la place de 101 pour donner un contenu un peu plus général au problème. Pour mesurer la longueur du parcours, nous utiliserons la variable p. Nous essayons d'évaluer l'espérance mathématique de la variable aléatoire mesurant le nombre d'achats nécessaires à la complétion de la collection.

La matrice de transition est une matrice carrée d'ordre $n+1$. En vertu de ce qui précède, elle ne contient d'éléments non nuls que sur la diagonale principale et sur la « sur-diagonale », si on peut dire. Elle s'écrit :

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & 0 & \frac{2}{n} & \frac{n-2}{n} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \frac{3}{n} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{2}{n} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \frac{n-1}{n} & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut écrire cette matrice sous la forme : $M=\left(\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline O & I \end{array}\right)$, où O est la matrice nulle à une ligne et n colonnes, I la matrice à un seul élément,1, et R la matrice colonne dont tous les éléments sont nuls sauf le dernier égal à $\frac{1}{n}$.

b. Puissances de la matrice de transition

Nous allons évaluer les puissances de la matrice M en utilisant les produits par blocs. Un raisonnement par récurrence conduit à ce que, pour tout entier p, $M^p=\left(\begin{array}{c|c} Q^p & \sum_{k=0}^{p-1} Q^k R \\ \hline O & I \end{array}\right)$.

Si on désigne par I_p la matrice carrée unité d'ordre p, l'égalité $\left(\sum_{k=0}^{p-1} Q^k\right)\left(I_p-Q\right)=I_p-Q^p$ permettrait d'évaluer $\sum_{k=0}^{p-1} Q^k$ si nous pouvions prouver que la matrice $\left(I_p-Q\right)$ est inversible. Ce résultat est admis ici. Nous admettons donc que $\sum_{k=0}^{p-1} Q^k=\left(I_p-Q^p\right)\left(I_p-Q\right)^{-1}$.

Évaluons les puissances de la matrice Q. Pour cela, nous admettons que cette matrice est diagonalisable et que la matrice diagonale D qui intervient dans la décomposition de Q a pour diagonale la diagonale de Q. En élevant cette matrice à la puissance p, on obtient une matrice diagonale dont les termes sont ceux de suites géométriques de premiers termes positifs inférieurs à 1. Cette observation conduit à conclure :

$$\lim_{p\to\infty} Q^p=O_n,$$

Où O_n est la matrice carrée d'ordre n dont tous les termes sont nuls. On peut donner une signification à la notion de limite d'une suite de matrices en disant que c'est la matrice dont les éléments sont les limites des suites d'éléments homologues des matrices de la suite.

$$S=\begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{n-1} & \frac{n}{n-2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & n \\ 0 & \frac{n}{n-1} & \frac{n}{n-2} & \frac{n}{n-3} & & & & & & n \\ \dots & 0 & \frac{n}{n-2} & \frac{n}{n-3} & & & & & & n \\ \dots & \dots & 0 & \frac{n}{n-3} & & & & & & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & & & & & & \dots \\ \dots & \dots & \dots & & & & & & & \dots \\ \dots & \dots & \dots & & & & & & & \dots \\ \dots & \dots & \dots & & & & & & & \dots \\ \dots & \dots & \dots & & & & & & & n \\ 0 & 0 & \dots & & & & & & 0 & n \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que la matrice inverse de I_p-Q est la matrice S définie ci-contre, ce qui peut être vérifié en exercice. Rappelons que la matrice I_p-Q n'a qu'au plus deux éléments non nuls par ligne, ce qui simplifie considérablement les calculs. Finalement, nous pouvons écrire la limite des puissances de la matrice de transition :

$$\lim_{p\to\infty} M^p=\left(\begin{array}{c|c} O_n & SR \\ \hline O & I \end{array}\right)$$

Ce résultat heureux annonce que le collectionneur, s'il peut y consacrer une infinité d'achats, complètera sa collection…

c. Espérance du nombre d'achats nécessaires

La variable aléatoire X dénombrant les achats à réaliser pour obtenir la collection complète peut être considérée comme la somme des variables aléatoires X_k dénombrant chacune les achats à réaliser avant d'obtenir le k-ième objet distinct alors qu'on en a déjà acquis k-1 distincts.

Soit k un entier non nul inférieur à n et soit j un entier naturel non nul. $X_k = j$ signifie qu'au j^{e} achat, le client a acheté $j-1$ produits contenant un aimantin au moins en double parmi les $k-1$ déjà en sa possession et qu'il a obtenu un aimantin différent parmi les $n-k+1$ autres aimantins existants.

On en déduit que

$$p(X = j) = \frac{(k-1)^{j-1} \times (n-k+1)}{n^j} \quad \text{soit} \quad p(X = j) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} \times \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

La variable X_k suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{n-k+1}{n}$. Son espérance mathématique est donc $E(X_k) = \dfrac{n}{n-k+1}$.

La somme des espérances des variables X_k est l'espérance de la variable X :

$E(X) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$, ou encore $E(X) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n-k+1}$,

et, par changement d'indice : $E(X) = n\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

En revenant au problème initial, on trouve que le collectionneur devra en moyenne acquérir 525 produits pour compléter sa collection.

Ressources : http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/collection/collection1.jsp
http://euler.ac-versailles.fr/wm3/pi2/collection/collection2.jsp

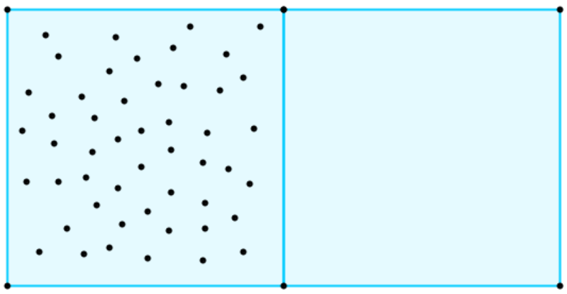
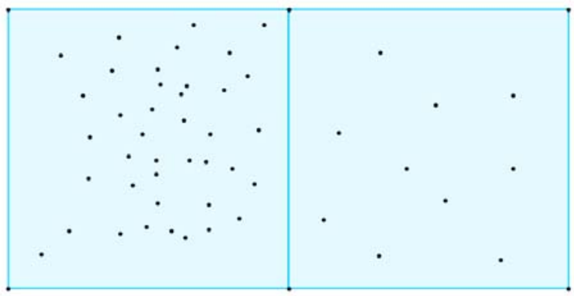
D. Le modèle d'urnes de T. & P. Ehrenfest

a. Présentation du problème

Ce modèle simplifié de diffusion d'un gaz à travers une membrane poreuse fut proposé en 1907 par les physiciens autrichiens Tatiana et Paul Ehrenfest pour décrire en termes de physique statistique les échanges de chaleur entre deux systèmes portés initialement à une température différente. Il permit ainsi de mieux comprendre le phénomène d'irréversibilité´ thermodynamique et de lever un paradoxe :

- D'un point de vue macroscopique, un système thermodynamique évolue naturellement et irréversiblement de façon que son entropie (quotient de la variation de chaleur par la température) soit maximum,
- mais d'un point de vue microscopique, on peut remarquer que les mouvements des particules sont réversibles.

Le but est de modéliser la répartition au cours du temps de N molécules de gaz à l'intérieur d'un récipient divisé en deux compartiments séparés par une membrane poreuse.

	
État initial	État à l'étape k

Description du modèle

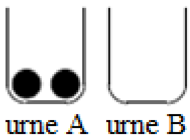
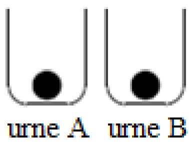
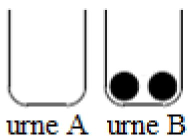
On modélise mathématiquement par l'expérience aléatoire suivante :

On considère 2 urnes A et B, et N boules numérotées de 1 a N.

Initialement, toutes les boules se trouvent dans l'urne A. Ensuite, aux étapes 1, 2, 3,… on tire au hasard, de façon équiprobable, un nombre entre 1 et N, et on change d'urne la boule correspondante.

b. *Étude du cas N = 2 :*

A tout instant k (k entier compris entre 0 et N), la répartition dans les urnes A et B est l'une des trois suivantes :

		
Répartition r_1	Répartition r_2	Répartition r_3

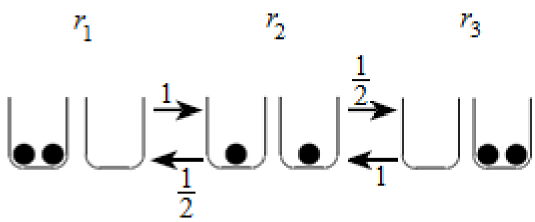
1. Utilisation d'une matrice :

Notons : R_1 l'événement « la répartition est r_1 » ;

R_2 l'événement « la répartition est r_2 » ;

R_3 l'événement « la répartition est r_3 ».

En notant, pour tout i et j de $\{1, 2, 3\}$; $p_{ij} = p_{R_i}(R_j)$, on a alors :



$$p_{12} = 1, p_{21} = \frac{1}{2}, p_{23} = \frac{1}{2}, p_{32} = 1 \text{ et } p_{11} = p_{22} = p_{33} = p_{13} = p_{31} = 0$$

Soit k un nombre entier naturel non nul.

Notons : A_k l'événement « à l'étape k, la répartition est r_1 » ;

B_k l'événement « à l'étape k, la répartition est r_2 » ;

C_k l'événement « à l'étape k, la répartition est r_3 ».

On a alors : $p(A_{k+1}) = p(A_{k+1} \cap A_k) + p(A_{k+1} \cap B_k) + p(A_{k+1} \cap C_k)$

$$= p(A_k)\, p_{A_k}(A_{k+1}) + p(B_k)\, p_{B_k}(A_{k+1}) + p(C_k)\, p_{C_k}(A_{k+1}).$$

Or $p_{A_k}(A_{k+1}) = p_{11}$, $p_{B_k}(A_{k+1}) = p_{21}$ et $p_{C_k}(A_{k+1}) = p_{31}$.

D'où : $p(A_{k+1}) = p_{11}p(A_k) + p_{21}p(B_k) + p_{31}p(C_k)$.

On établit de même que :

$$p(B_{k+1}) = p_{12}p(A_k) + p_{22}p(B_k) + p_{32}p(C_k)$$

$$p(C_{k+1}) = p_{13}p(A_k) + p_{23}p(B_k) + p_{33}p(C_k)$$

Nous pouvons représenter le système $\begin{cases} p(A_{k+1}) = p_{11}p(A_k) + p_{21}p(B_k) + p_{31}p(C_k) \\ p(B_{k+1}) = p_{12}p(A_k) + p_{22}p(B_k) + p_{32}p(C_k) \\ p(C_{k+1}) = p_{13}p(A_k) + p_{23}p(B_k) + p_{33}p(C_k) \end{cases}$ par $M_{k+1} = M_k T$, où

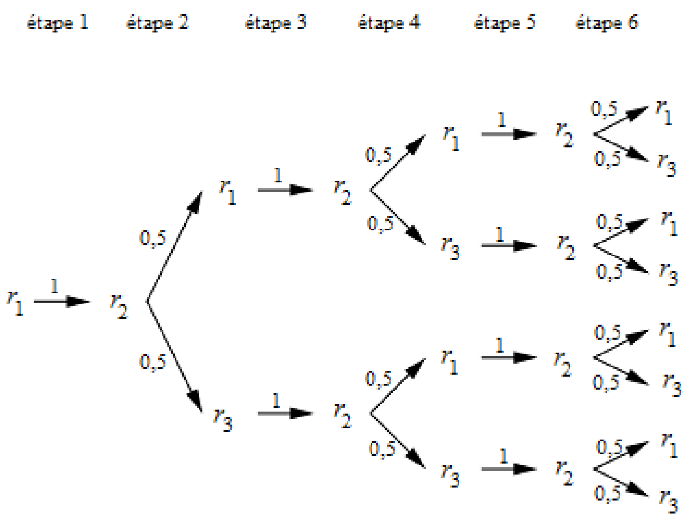
pour tout entier naturel k: $M_k = \begin{pmatrix} p(A_k) & p(B_k) & p(C_k) \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

A l'étape initial, la répartition est r_1, donc $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On établit par récurrence que :

- pour tout entier naturel k non nul: $M_k = M_0 T^k$
- pour tout entier k impair : $M_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui correspond au fait qu'à tout instant impair, la répartition est toujours r_2.
- pour tout entier k pair, non nul : $M_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, ce qui correspond au fait qu'à tout instant pair, la répartition est soit r_1 soit r_3.

2. Utilisation d'un arbre



A la *k*ième étape, on obtient les arbres suivants :

Si k est impair	Si k est pair
$r_1 \xrightarrow{1} r_2$ $r_3 \xrightarrow{1} r_2$	$r_2 \xrightarrow{0,5} r_1$ $r_2 \xrightarrow{0,5} r_3$

On retrouve lors les résultats du paragraphe précédent.

Remarque :Le recours au calcul matriciel n'est vraiment utile que pour un grand nombre de particules mais le cas où $N = 2$ permet d'appréhender le problème en expliquant l'utilisation des matrices et en comparant les résultats obtenus avec ceux que l'on obtient avec l'utilisation d'un arbre. Cependant il est nécessaire de constater que si $N = 2$, le processus est réversible, or l'intérêt de l'expérience est justement de montrer son irréversibilité pour des « grandes valeurs » de N.

3. Calcul du temps de retour

Considérons $2n$ étapes et notons T_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'étapes pour revenir à l'état initial :

D'après l´étude précédente, on a :

$p(T_n = 1) = 0, p(T_n = 3) = 0$ et, pour tout entier naturel k, $p(T_n = 2k+1) = 0$;

$p(T_n = 2) = \frac{1}{2}, p(T_n = 4) = \frac{1}{4}$ et, pour tout entier naturel k non nul, $p(T_n = 2k) = \frac{1}{2^k}$.

Calculons l'espérance de T_n :

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^{k=2n} 2k \times p(T_n = 2k) = \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{k}{2^{k-1}}.$$

Calculons cette somme de deux façons différentes.

- Première méthode

  On calcule successivement les sommes géométriques : $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k-1}}$, $\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{2^{k-1}}$, $\sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{2^{k-1}}$,…, $\sum_{k=n-2}^{n-1} \frac{1}{2^{k-1}}$ et $\sum_{k=n-1}^{n-1} \frac{1}{2^{k-1}}$.

  En ajoutant ces sommes, on obtient : $E(T_n) = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$.

- Deuxième méthode

  On considère la fonction définie sur **R** par $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{2^k}$.

  D'une part : $f(x) = \dfrac{\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}} - 1}{\frac{x}{2} - 1}$ si $x \neq 2$ et $f(2) = n$.

  Pour $x \neq 2$, les deux expressions de $f(x)$ permettent d'exprimer $f'(x)$ de deux façons différentes. On obtient alors deux expressions de $f'(1)$, ce qui permet de calculer $E(T_n)$.

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} E(T_n) = 4$. On revient donc en moyenne à l'état initial au bout de 4 étapes.

c. Etude du cas N > 2

Soit X_0 la variable aléatoire égale au nombre initial de boules dans l'urne A. À chaque instant n ($n \geq 1$), on tire au hasard, de façon équiprobable, un numéro entre 1 et N, et on change d'urne la boule correspondante.
Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne A à l'instant n.

Ces variables aléatoires sont définies sur $E = [\![0\,; N]\!]$

Ceci se traduit par : pour tout (i ; j) de $[\![0\,; N]\!]^2$, $p_{(X_n = i)}(X_{n+1} = j) = \begin{cases} \dfrac{i}{N} \text{ si } j = i-1 \\ \dfrac{N-i}{N} \text{ si } j = i+1 \\ 0 \text{ si } |i-j| \neq 1 \end{cases}$.

- L'état du processus au temps $n+1$ ne dépend que de l'état du processus au temps n.
- $p_{(X_n = i)}(X_{n+1} = j)$ ne dépend pas de n.
- Notons $p_{i,j} = p_{(X_n = i)}(X_{n+1} = j)$

  Pour tout j de $[\![0\,; N]\!]$, $p(X_{n+1} = j) = \displaystyle\sum_{i=0}^{N} p_{(X_n = i)}(X_{n+1} = j) \times p(X_n = i) = \sum_{i=0}^{N} p_{i,j} \times p(X_n = i)$ (1)

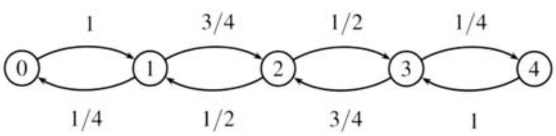
Soit, pour tout n, la matrice ligne $V_n = \big(p(X_n = 0), p(X_n = 1), \ldots, p(X_n = N)\big)$ et soit P la matrice carrée de taille N+1

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{N} & 0 & \frac{N-1}{N} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{N} & 0 & \frac{N-2}{N} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{N-1}{N} & 0 & \frac{1}{N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout entier n, $V_{n+1} = V_n P$ (relation (1)), puis $V_n = V_0 P^n$.

Exemple pour 4 boules : $E = \{0\,; 1\,; 2\,; 3\,; 4\}$ et $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Graphe de transition :



(Yves Caumel, page 154)

$$\mathrm{P}^2=\begin{pmatrix} \frac14 & 0 & \frac34 & 0 & 0\\ 0 & \frac58 & 0 & \frac38 & 0\\ \frac18 & 0 & \frac38 & 0 & \frac18\\ 0 & \frac38 & 0 & \frac58 & 0\\ 0 & 0 & \frac34 & 0 & \frac14\end{pmatrix}.$$ Pour $V_0=(1,0,0,0,0)$, $V_2=\left(\frac14,0,\frac34,0,0\right)$.

On obtient, à l'aide d'un logiciel de calcul formel :

$$\mathrm{P}^n=\begin{pmatrix}
\left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2^{n+2}}\right) & \left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n+1}}\right) & \left(1+(-1)^n\right)\times\frac38 & \left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}\right) & \left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{2^{n+2}}\right)\\
\left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2^{n+3}}\right) & \left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n+2}}\right) & \left(1-(-1)^n\right)\times\frac38 & \left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+2}}\right) & \left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{2^{n+3}}\right)\\
\left(1+(-1)^n\right)\times\frac{1}{16} & \left(1-(-1)^n\right)\times\frac14 & \left(1+(-1)^n\right)\times\frac38 & \left(1-(-1)^n\right)\times\frac14 & \left(1+(-1)^n\right)\times\frac{1}{16}\\
\left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{2^{n+3}}\right) & \left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+2}}\right) & \left(1-(-1)^n\right)\times\frac38 & \left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n+2}}\right) & \left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2^{n+3}}\right)\\
\left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2^{n+2}}\right) & \left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}\right) & \left(1+(-1)^n\right)\times\frac38 & \left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n+1}}\right) & \left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2^{n+2}}\right)
\end{pmatrix}$$

Pour $V_0=(1,0,0,0,0)$,

$$V_n=\left(\left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2^{n+2}}\right)\quad \left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\quad \left(1+(-1)^n\right)\times\frac38\quad \left(1-(-1)^n\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\quad \left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{2^{n+2}}\right)\right).$$

Le nombre de boules moyen dans l'urne au bout de n étapes est $\mathrm{E}(X_n)=2-\frac{1}{2^{n-1}}$.

Convergence des suites (V_{2n}) et (V_{2n+1}) :

Dans un cadre plus général, on peut conjecturer à l'aide d'un logiciel de calcul que les suites (V_{2n}) et (V_{2n+1}) convergent.

En admettant l'existence de la limite λ_k de la suite $\left(p(X_{2n}=k)\right)$ et de la limite μ_k de la suite $\left(p(X_{2n+1}=k)\right)$, on peut calculer celles ci à partir des égalités :

pour tout k de $[\![0\,;N]\!]$, $p(X_{n+1}=k)=\sum_{i=0}^{N}p_{(X_n=i)}(X_{n+1}=k)\times p(X_n=i)=\sum_{i=0}^{N}p_{i,k}\times p(X_n=i)$

$$\begin{cases}\lambda_k=\left(1-\frac{k-1}{N}\right)\mu_{k-1}+\frac{k+1}{N}\mu_{k+1} \text{ pour } 1\le k\le N-1\\ \mu_k=\left(1-\frac{k-1}{N}\right)\lambda_{k-1}+\frac{k+1}{N}\lambda_{k+1} \text{ pour } 1\le k\le N-1\\ \lambda_0=\frac1N\mu_1 \;\;;\;\; \mu_0=\frac1N\lambda_1\\ \lambda_N=\frac1N\mu_{N-1}\;\;;\;\;\mu_N=\frac1N\lambda_{N-1}\end{cases}$$

en posant $v_k = \lambda_k + \mu_k$: $\begin{cases} v_k = \lambda_k \text{ si } k \text{ est pair} \\ v_k = \mu_k \text{ si } k \text{ est impair} \end{cases}$

on obtient le système $\begin{cases} v_k = \left(1 - \dfrac{k-1}{N}\right) v_{k-1} + \dfrac{k+1}{N} v_{k+1} \text{ pour } 1 \leq k \leq N-1 \\ v_0 = \dfrac{1}{N} v_1 \\ v_N = \dfrac{1}{N} v_{N-1} \end{cases}$

On en déduit : $\begin{cases} v_1 = N v_0 \\ v_{k+1} = \dfrac{N}{k+1} v_k - \dfrac{N-k+1}{k+1} v_{k-1} \text{ pour } 1 \leq k \leq N-1 \\ v_N = \dfrac{1}{N} v_{N-1} \end{cases}$

$v_2 = \dfrac{N}{2} v_1 - \dfrac{N}{2} v_0 = \dfrac{N(N-1)}{2} v_0$; $v_3 = \dfrac{N}{3} v_2 - \dfrac{N-1}{3} v_1 = \dfrac{N^2(N-1)}{6} v_0 - \dfrac{N(N-1)}{3} v_0 = \dfrac{N(N-1)(N-2)}{6} v_0$

On montre alors par récurrence : pour tout k de $[\![0\,; N]\!]$: $v_k = \dbinom{N}{k} v_0$.

La condition $\sum\limits_{i=0}^{N} v_k = 2$ conduit alors à : pour tout k de $[\![0\,; N]\!]$: $v_k = \dbinom{N}{k} \times 2^{-N+1}$.

Autre méthode de calcul :

La relation $v_k = \left(1 - \dfrac{k-1}{N}\right) v_{k-1} + \dfrac{k+1}{N} v_{k+1}$ peut s'écrire $\dfrac{k+1}{N} v_{k+1} - \left(1 - \dfrac{k}{N}\right) v_k = \dfrac{k}{N} v_k - \left(1 - \dfrac{k-1}{N}\right) v_{k-1}$

La suite de terme général $u_i = \dfrac{i+1}{N} v_{i+1} - \left(1 - \dfrac{i}{N}\right) v_i$ est constante ($0 \leq i \leq N-1$), égale à 0.

La suite de terme général $u_k = \dfrac{k+1}{N} v_{k+1} - \left(1 - \dfrac{k}{N}\right) v_k$ est constante ($0 \leq k \leq N-1$), égale à 0.

On en déduit que, pour $0 \leq k \leq N-1$, $v_{k+1} = \dfrac{N-k}{k+1} v_k$ et on conclut comme ci-dessus.

Remarque : la matrice P possède $N+1$ valeurs propres distinctes : $1 - \dfrac{2k}{N}$, k $\in [\![0\,; N]\!]$.

En particulier -1 est une valeur propre de P.

(Mark Kac ; Random Walk and the Theory of Brownian Motion, American Mathematical Monthly **54(7)** (1947), 369-391)

Nombre moyen de boules dans l'urne A

On démontre, en utilisant des espérances conditionnelles, que $\mathrm{E}(X_n) = \dfrac{N}{2} + \left(1 - \dfrac{2}{N}\right)^n \left(E(X_0) - \dfrac{N}{2}\right)$

(Foata et Fuchs- Dunod)

Dans le cas où N est supérieur à 2, $\mathrm{E}(X_n)$ tend vers $\frac{N}{2}$.

Avec le temps, il y aura à peu près autant de boules dans les deux compartiments.

Temps de retour

Il se démontre que, le temps de retour moyen à l'état k (c'est à dire, partant de l'état de k boules dans l'urne A, on retourne pour la première fois à k boules dans le compartiment A) est :

$$m_k = \frac{2^N}{\binom{N}{k}}.$$

Le temps moyen de retour à l'état où l'urne A est vide est alors égal à 2^N.

Si N est un multiple du nombre d'Avogadro, égal à $6{,}02.10^{23}$, et chaque transition se fait en une seconde, ce temps moyen est astronomique. On n'observe donc pas de retour à l'état initial.

Ressource : http://hal.inria.fr/docs/00/05/45/65/PDF/co24th2.pdf

3. Suites liées par une relation non linéaire

Le modèle proie-prédateur de Volterra

Le mathématicien Volterra a proposé en 1926 un modèle décrivant l'évolution conjointe des sardines et des requins constatée par des pêcheurs de l'Adriatique : les effectifs des deux espèces variaient de façon périodique en fonction du temps, avec la même période mais en étant décalées dans le temps.

On considère alors deux populations dont les effectifs à l'instant t sont notés $A(t)$ et $B(t)$, qui désignent respectivement le nombre de proies et le nombre de prédateurs.
On suppose qu'en l'absence de prédateurs, la population des proies aurait un taux d'accroissement constant positif noté a et qu'en l'absence de proies, la population des prédateurs aurait un taux d'accroissement constant négatif noté $-d$.
On suppose de plus que lorsque les deux populations coexistent, l'effectif $A(t)$ augmentera d'autant moins vite que $B(t)$ sera grand et que l'effectif $B(t)$ augmentera d'autant plus vite que $A(t)$ sera grand.
Le modèle le plus simple est obtenu en supposant qu'il existe deux constantes positives b (quantité supposée constante de proies disparaissant par prédateur et par unité de temps) et c (quantité supposée constante de prédateurs « apparaissant » par proies et par unité de temps) et telles que les coefficients d'accroissements par rapport au temps sont donc $a - b\,B(t)$ et $-d + c\,A(t)$.

On aboutit ainsi au système (S) d'équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = A(t)\big(a - bB(t)\big) \\ \dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = B(t)\big(-d + cA(t)\big) \end{cases}$$

Un tel système est appelé *système dynamique*. On peut aussi l'écrire $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = f\left(A(t), B(t)\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = g\left(A(t), B(t)\right) \end{cases}$

On appelle de plus *point d'équilibre* du système toute fonction constante solution du système.

a. Discrétisation

Si on discrétise le problème, on décrit les populations à des instants successifs t et $t+\Delta(t)$ à l'aide de deux suites (A_n) et (B_n) de premiers termes A_0 et B_0 (effectifs à l'instant 0) et telles que pour tout entier n :

$$\begin{cases} A_{n+1} - A_n = \Delta(t) A_n \left(a - bB_n\right) \\ B_{n+1} - B_n = \Delta(t) B_n \left(-d + cA_n\right) \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} A_{n+1} = A_n\left(1 + a' - b'B_n\right) \\ B_{n+1} = B_n\left(1 - d' + c'A_n\right) \end{cases}$$

où $a' = \Delta(t)a$, $b' = \Delta(t)b$, $c' = \Delta(t)c$ et $d' = \Delta(t)d$.

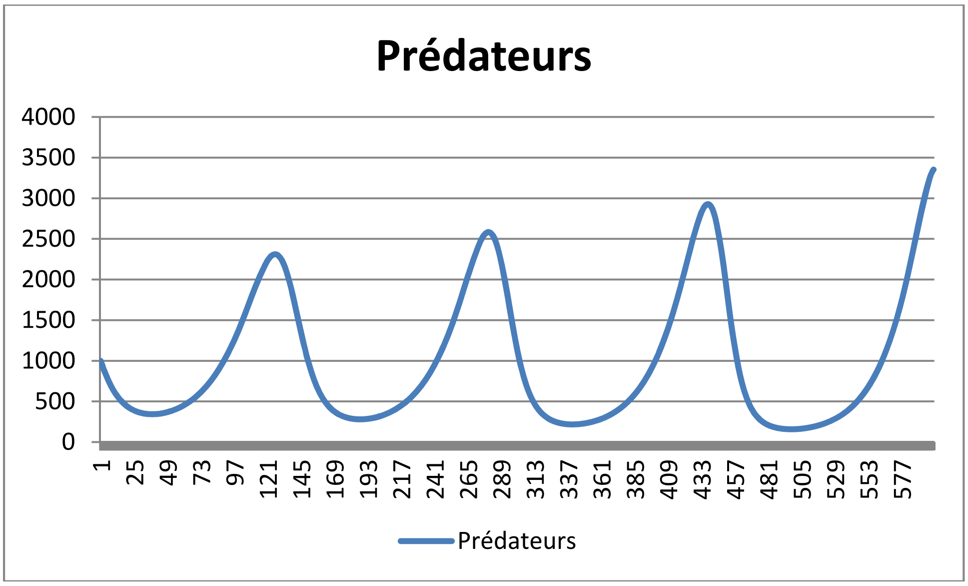
Cela ne change pas la valeur des rapports $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{d}{c}$ mais la taille des coefficients *a*, *b*, *c* et *d*.

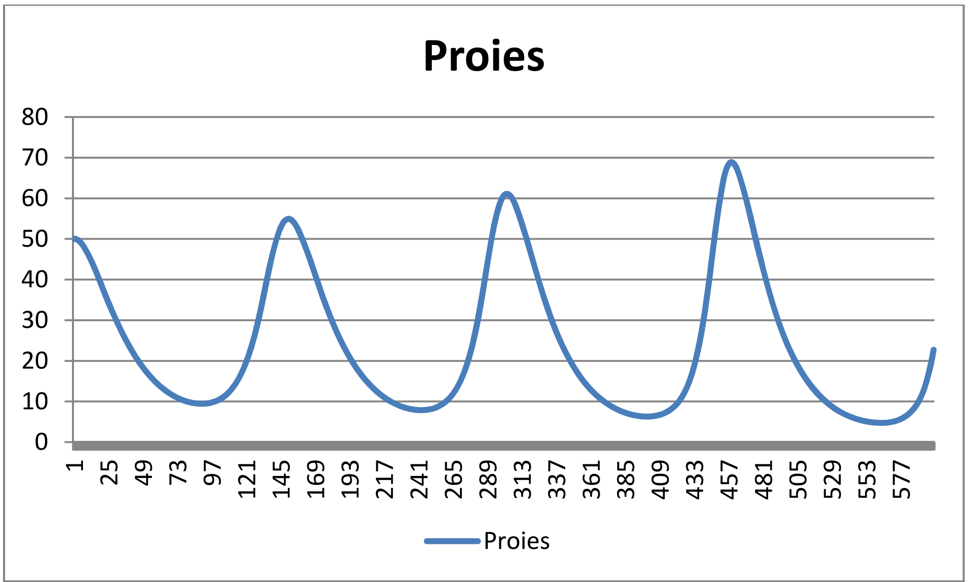
En fait, à condition de prendre de petites valeurs pour ces coefficients, on peut se limiter au système (S_1) :

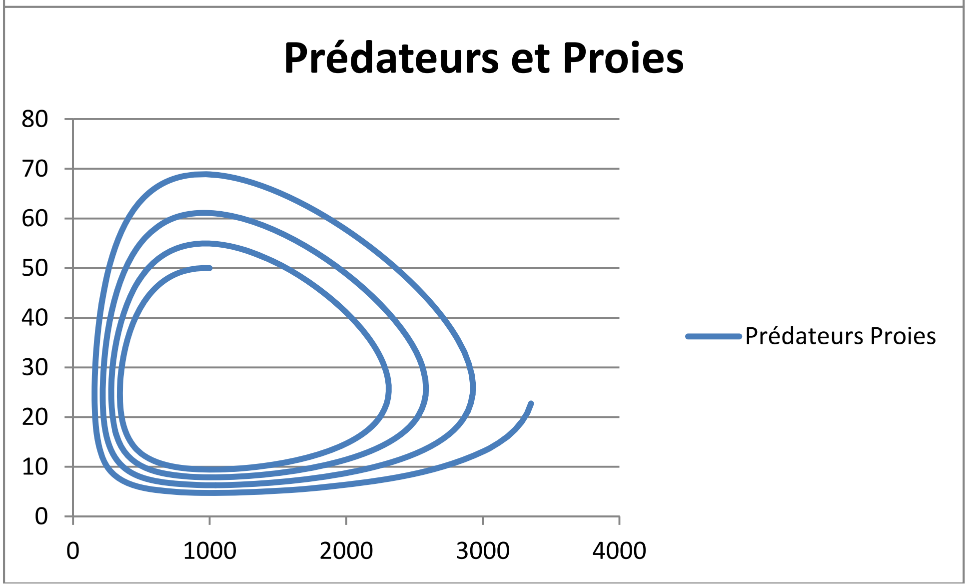
$$\begin{cases} A_{n+1} = A_n\left(1 + a - bB_n\right) \\ B_{n+1} = B_n\left(1 - d + cA_n\right) \end{cases}.$$

En faisant varier *a*, *b*, *c* et *d*, on peut obtenir des évolutions conjointes des deux populations très différentes.

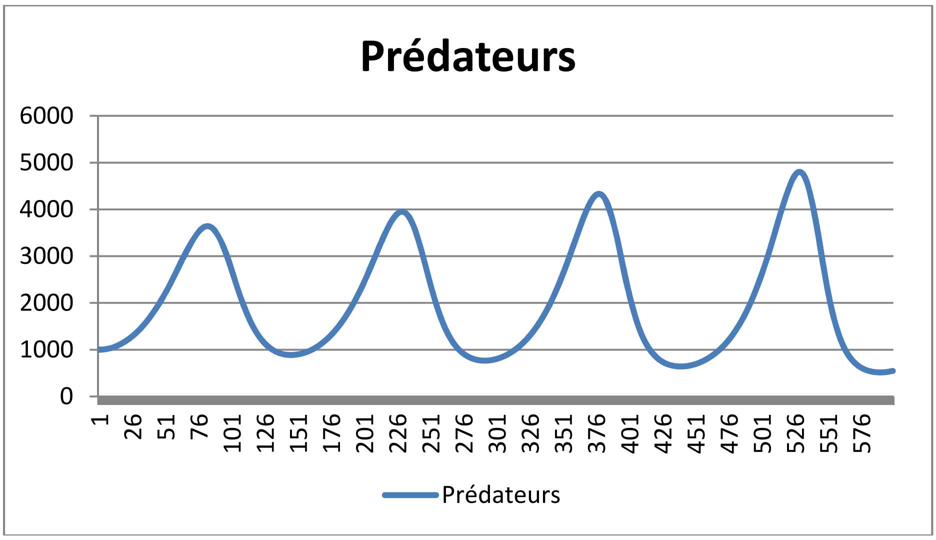
Pour $a = 0{,}05$, $b = 0{,}002$, $d = 0{,}04$ et $c = 0{,}00004$ on obtient les graphiques suivants :

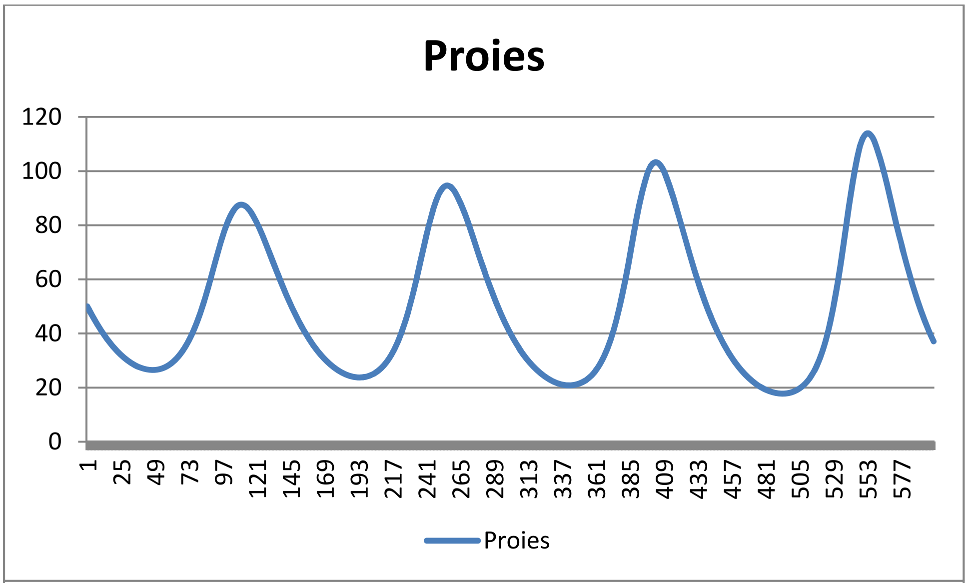


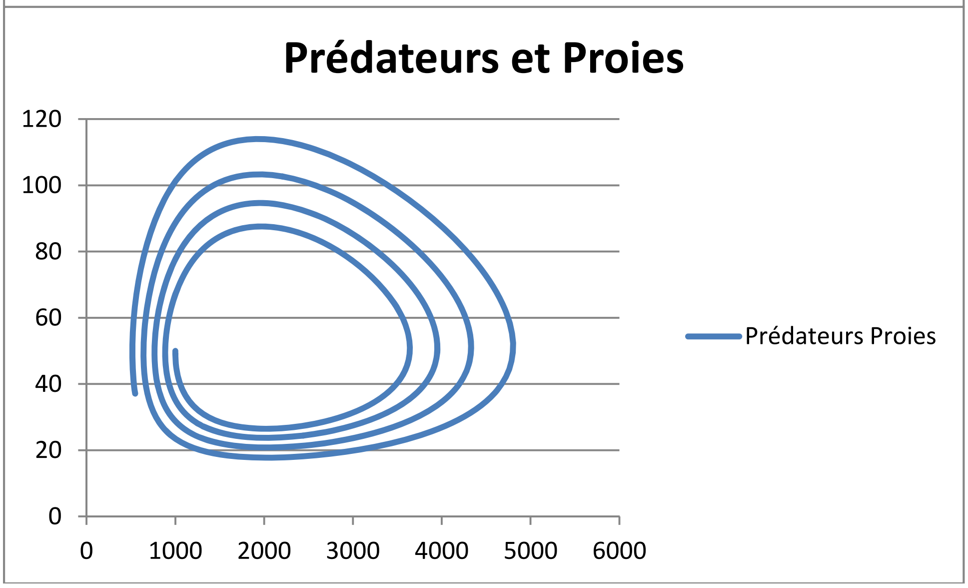




Pour $a = 0{,}05$, $b = 0{,}001$, $d = 0{,}04$ et $c = 0{,}00002$ on obtient les graphiques suivants :





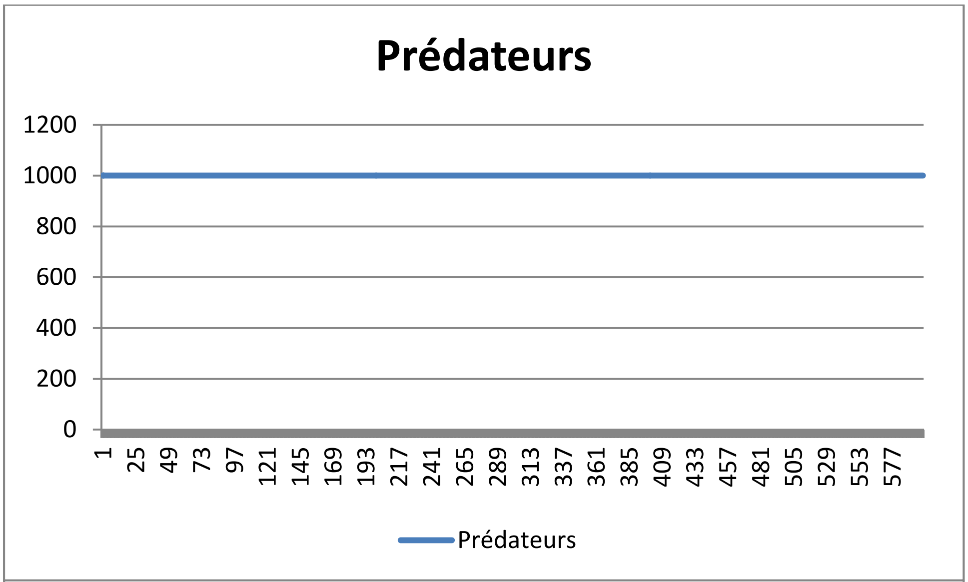


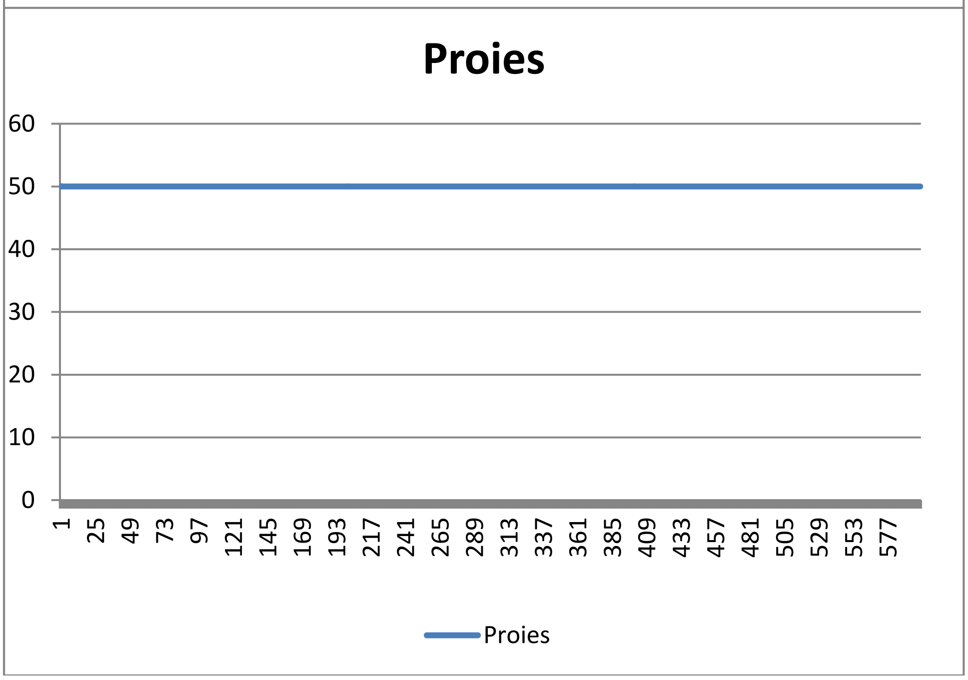
b. Recherche d'un équilibre

Les effectifs des deux populations sont constantes si et seulement si $\begin{cases} A(t)\left(a-bB(t)\right)=0 \\ B(t)\left(-c+dA(t)\right)=0 \end{cases}$.

Ceci donne deux points d'équilibre $\left(A^*,B^*\right)=\left(0,0\right)$ et $\left(A^*,B^*\right)=\left(\dfrac{d}{c},\dfrac{a}{b}\right)$.

Par exemple, pour $a=0,05$, $b=0,001$, $d=0,02$ et $c=0,00002$ on obtient les graphiques suivants :





Il est de plus possible de caractériser un point d'équilibre, qui peut être stable si une petite perturbation de A ou de B est suivie d'un retour au point (A^*, B^*) ou instable dans le cas contraire. Il est enfin possible de tracer le « portrait » du système dynamique en délimitant, dans le plan (A, B), les régions où les signes de A' et B' sont constants, en traçant les lieux des points où la dérivée A' ou B' est nulle.

c. Linéarisation autour du point d'équilibre $(x, y) = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$

On reprend le système (S_1) $\begin{cases} A_{n+1} = A_n(1 + a - bB_n) \\ B_{n+1} = B_n(1 - d + cA_n) \end{cases}$ et on se place au voisinage du point d'équilibre en posant $U_n = A_n - \frac{d}{c}$ et $V_n = B_n - \frac{a}{b}$.

On peut alors vérifier que le système (S_1) équivaut au système $\begin{cases} U_{n+1} = U_n - \dfrac{bd}{c}V_n - bU_nV_n \\ V_{n+1} = \dfrac{ac}{b}U_n + V_n + cU_nV_n \end{cases}$.

Si on se place au voisinage du point d'équilibre, le terme U_nV_n peut être considéré comme négligeable et on peut approximer le système (S_2) par le système linéaire $\begin{cases} U_{n+1} = U_n - \dfrac{bd}{c}V_n \\ V_{n+1} = \dfrac{ac}{b}U_n + V_n \end{cases}$ qui se traduit matriciellement par $\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{bd}{c} \\ \dfrac{ac}{b} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}$.

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{bd}{c} \\ \dfrac{ac}{b} & 1 \end{pmatrix}$. On aura alors $\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}$.

On peut étudier, à l'aide d'un logiciel et pour différentes valeurs de *a*, *b*, *c* et *d*, les puissances successives de M et des termes successifs des suites (U_n) et (V_n).

On peut aussi revenir au système continu et se placer à nouveau au voisinage du point d'équilibre en posant $A(t) = U(t) + \dfrac{d}{c}$ et $B(t) = V(t) + \dfrac{a}{b}$.

On peut alors vérifier que le système (S) s'écrit $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{bd}{c}V(t) - bU(t)V(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{ac}{b}U(t) - cU(t)V(t) \end{cases}$.

En négligeant cette fois-ci les termes en $U(t)V(t)$, le système devient $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{bd}{c}V(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{ac}{b}U(t) \end{cases}$.

En dérivant à nouveau les deux équations du système on aboutit à $U''(t) = -ad\,U(t)$ et $V''(t) = -ad\,V(t)$.

On admettra que si $\omega = \sqrt{ad}$ alors il existe des constantes α, β, γ et δ telles que :

$$U(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t) \quad \text{et} \quad V(t) = \gamma\cos(\omega t) + \delta\sin(\omega t).$$

Ceci justifie la périodicité observée dans le système proies-prédateurs, la période valant $\dfrac{2\pi}{\sqrt{ad}}$.

Dans le cas où $a = 0,05$, $b = 0,001$, $d = 0,04$ et $c = 0,00004$, la période vaut $\dfrac{2\pi}{\sqrt{0,05 \times 0,04}}$ soit environ 140.

Modèle perturbé

Pour rendre le modèle plus réaliste, on peut limiter les ressources alimentaires des proies, ce qui limité leur croissance. Il existe alors une constante k telle que le système dynamique s'écrive :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = A(t)\left(a - bB(t) - kA(t)\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = B(t)\left(-d + cA(t)\right) \end{cases}.$$

Les points d'équilibre sont alors $\left(A^*, B^*\right) = \left(0,0\right)$ et $\left(A^*, B^*\right) = \left(\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{b} - k\dfrac{d}{bc}\right)$.

En posant cette fois-ci $A\left(t\right) = U\left(t\right) + \dfrac{d}{c}$ et $B\left(t\right) = V\left(t\right) + \dfrac{a}{b} - k\dfrac{d}{bc}$ et en négligeant encore les termes en $U\left(t\right)V\left(t\right)$, on aboutit au système linéaire $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -k\dfrac{d}{c}U(t) - \dfrac{bd}{c}V\left(t\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \left(\dfrac{ac}{b} - k\dfrac{d}{b}\right)U\left(t\right) \end{cases}$ dont la matrice associée est

$$N = \begin{pmatrix} -k\dfrac{d}{c} & -\dfrac{bd}{c} \\ \dfrac{ac - kd}{b} & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut lui associer le système discrétisé linéarisé $\begin{cases} U_{n+1} = \left(1 - k\dfrac{d}{c}\right)U_n - \dfrac{bd}{c}V_n \\ V_{n+1} = \left(\dfrac{ac - kd}{b}\right)U_n + V_n \end{cases}$.

Dans le cas où $a = 0,05$, $b = 0,001$, $d = 0,04$ et $c = 0,00004$, le point d'équilibre est $\left(A^*, B^*\right) = \left(1000, 50 - k10^6\right)$ et $N = \begin{pmatrix} -1000k & -1 \\ 0,002 - 40k & 0 \end{pmatrix}$

On peut alors faire varier k et constater, sur le système discrétisé, que pour des valeurs très petites de k, le système converge vers le point d'équilibre, lorsque les valeurs initiales sont proches de ce point d'équilibre.